

# Identificação e Controle de um Processo de Nível: Aplicação Experimental da Técnica de Augmentação Estocástica de Controlador PID

Marcelo N. Lima, Maryson da S. Araújo, Antonio da S. Silveira

Laboratório de Controle e Sistemas, Universidade Federal do Pará, PA,  
(e-mails: eng.lima@gmail.com, maryson@ufpa.br, asilveira@ufpa.br).

---

**Abstract:** In this article it is shown the experimental results of the application of a design technique that adds stochastic characteristics to the PID controller, enhancing its capacity to handle disturbances such as process noise and measurement ones. The experiments were conducted on a type of plant known as level tank. The model of the plant was obtained experimentally and based on the ARMAX structure via parametric identification using the MATLAB software Identification toolbox. Such model structure can incorporate the process noise in the colored case, allowing the application of the stochastic augmentation of the PID controller by means of the generalized minimum variance control method. Simulations and experimental results obtained on the level tank demonstrated that the stochastic PID case has outperformed the conventional digital PID in terms of robustness to noise, showing better performance and less energy consumption.

**Resumo:** Neste artigo são apresentados os resultados experimentais da aplicação de uma técnica de projeto que acrescenta características de controle estocástico ao controlador PID, melhorando a sua capacidade de tratar perturbações do tipo ruído de processo e de medição. Os experimentos foram conduzidos em uma planta do tipo tanque de nível. O modelo da planta foi obtido experimentalmente com base na estrutura ARMAX via identificação paramétrica usando funções da *Toolbox* de identificação de sistemas do *MATLAB*. Tal estrutura de modelo pode incorporar a modelagem do ruído de processo na condição de ruído colorido, permitindo a aplicação da augmentação estocástica do controlador PID a partir do método de controle de variância mínima generalizado. Os resultados de simulação e dos experimentos obtidos com o tanque de nível demonstraram que o caso de PID estocástico superou o PID digital convencional em termos de robustez a ruídos, fornecendo melhor desempenho e consumindo menos energia.

**Keywords:** PID controller; Minimum variance controller; Stochastic controller; System identification; Level tank process.

**Palavras-chaves:** Controlador PID; Controlador de variância mínima; Controlador estocástico; Identificação de sistemas; Processo nível de líquido.

---

## 1. INTRODUÇÃO

A ideia utilizada neste artigo traz melhorias de recentes pesquisas na área de controle, pois incorpora soluções estocásticas para tratamento de ruídos em plantas reais. Uma técnica especial de controle preditivo e estocástica é incorporada a um controlador PID digital, que consiste no emprego do controle de variância mínima generalizado (GMVC) (Clarke e Gawthrop, 1975). Este controlador é fruto da Teoria de Controle Estocástico apresentada por Åström (1970). A lei de controle do GMVC se baseia em um modelo de processo estocástico para realizar o projeto do controlador, sendo também possível incorporar ao projeto GMVC uma estrutura de controlador previamente conhecida para direcionar o projeto a um formato específico, conforme demonstrado em Pinheiro et al. (2016). O algoritmo do controlador, além de fazer um tratamento estocástico, oferece a capacidade de predição e controle ótimo pela minimização de uma função custo.

As técnicas de controle preditivo e estocásticas foram incorporadas ao controlador PID pelo método chamado de Augmentação Estocástica (AE), como demonstrado por Silva e Silveira (2018). Isto motivou este trabalho para a aplicação em uma planta de medição e controle de nível, onde as informações provenientes de sensores capacitivos são muito sensíveis a ruídos, tal que o tratamento estocástico justifica a utilização da técnica AE (Lucas et al., 2020). Os sistemas de nível são frequentemente usados em alguns processos e equipamentos industriais, como, por exemplo: sistemas químicos, caldeiras, sistemas hidráulicos, reservatórios a bordo de navios e em geral. Na Figura 1 ilustra-se a planta a ser controlada, onde este sistema de nível, apesar de possuir escala reduzida, retrata a realidade de processos encontrados na indústria.

O sistema de nível é constituído por circuitos eletrônicos de condicionamento de sinais, que garantem que as entradas e saídas analógicas operem entre 0 e 5V, e por um circuito

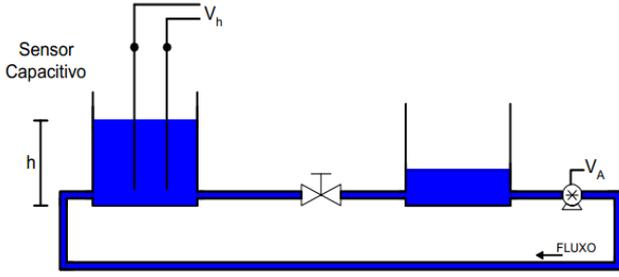


Figura 1. Planta do tipo tanque de nível. (Superior) Diagrama de funcionamento do processo. (Inferior) Detalhes construtivos do processo.

de potência para o acionamento da bomba de recalque que gera o fluxo de entrada de água no tanque de nível.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 2 detalha o transdutor de nível, composto por um oscilador senoidal cuja parcela de capacitância responsável por oscilações é dada pela capacitância das hastes mostradas na Figura 1. O sinal gerado na saída do oscilador é quadrado e, em seguida, este sinal passa por um circuito monoestável, sendo seu sinal de saída um trem de pulsos, cujas variações de frequência provocam modificações proporcionais. O sinal de saída é filtrado e o sinal DC obtido é proporcional ao nível, onde o bloco deslocador oferece o sinal em tensão na faixa de 0 a 5V.

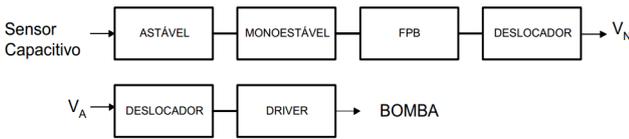


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema de condicionamento de sinal de nível e do sistema de acionamento da bomba de recalque de injeção de água.

O acionamento da bomba é feito por um *driver* linear a transistores que modifica a tensão na bomba de recalque a partir de sinais de comando, na faixa de 0 a 5V, amplificando-os até 12V, 1,5A.

Visando avaliar a técnica AE com controle PID no problema de controle de nível, este artigo está organizado de maneira a revisar os principais tópicos necessários à técnica AE, sendo estes: identificação de sistemas e análise do modelo identificado, controle de variância mínima, controle PID, formulação do PID e GMVC pelo método AE. Por fim, são apresentados os resultados comparativos entre o PID convencional e o PID estocástico.

## 2. IDENTIFICAÇÃO DO MODELO DA PLANTA

Para a identificação do modelo da planta utilizou-se um microcontrolador Arduino que fez a ponte de conversão Analógico-Digital (ADC) e Digital-Analógico (DAC) dos sinais analógicos de entrada e saída da planta, e os sinais de comando digitais provenientes do algoritmo de controle, desenvolvido no MATLAB, embarcado em um computador. Para escrever e ler informações no microcontrolador, trabalhando em conjunto com o MATLAB utilizou-se o conjunto de *software* e *firmware* Daqduino (Silveira, 2023).

O projeto do método AE depende do GMVC que, por sua vez, exige a identificação de um modelo da planta. Este modelo deve conter tanto as informações de causa e efeito determinísticas quanto o modelo estocástico que caracteriza as incertezas de modelagem e ruídos (Silva e Silveira, 2018). A qualidade desse modelo estimado depende, em parte, da natureza do sinal de entrada aplicado na fase de coleta das amostras (Coelho e Coelho, 2015). Em alguns casos, os únicos dados disponíveis serão os dados de operação normal, enquanto em outras situações será possível e desejável efetuar testes de forma a extrair informação dinâmica do sistema (Aguirre, 2007).

### 2.1 Escolha e coleta de sinais

Na identificação de sistemas é fundamental excitar a planta utilizando-se sinais com conteúdo harmônico diversificado, a fim de obter dados de resposta que representem a dinâmica do modelo em amplo espectro desejado. Em muitas situações, a escolha do sinal de excitação e das variáveis que serão usadas como entradas e saídas é simples de ser feita, mas, infelizmente, não é tão claro em sistemas onde as malhas de controle não são tão óbvias, como, por exemplo, em sistemas biológicos ou de economia (Aguirre, 2007). O sinal de entrada deve excitar as denominadas frequências naturais ou modos do sistema, forçando-o a revelar, na saída, as suas características dinâmicas.

Para a identificação de sistemas lineares é comum o uso de sinal de excitação do tipo sequência binária pseudo aleatória (SBPA), tendo como dupla finalidade, excitar os modos do sistema que correspondem ao conteúdo espectral e prevenir a ocorrência de um mal condicionamento numérico. A comutação de um nível para outro ocorre de forma aleatória, cuja estatística pode ser controlada pela seleção do conteúdo espectral do sinal SPBA. Esta seleção baseia-se em determinadas regras de interpretação (Aguirre, 2007). Neste artigo foi utilizada uma sequência de comprimento máximo gerada a partir de um registrador de deslocamento baseado em operação com portas lógicas digitais do tipo *E* ou *OU*, cujo comprimento máximo da sequência é  $N = 2^n - 1$ , onde  $n$  é o número de bits do registrador de deslocamento.

A SBPA é configurada pela seleção da amplitude e do período  $T = NT_b$ , onde  $T_b$  é o intervalo entre bits. Tal seleção de parâmetros tem papel fundamental na obtenção do modelo (Aguirre, 2007). A amplitude da SBPA é limitada pela máxima excursão permitida ao sinal de excitação do processo, sem levar o sistema a operar fora do ponto de operação linear de interesse. A periodicidade do sinal gerado é determinada por  $n$  e  $T_b$ , onde  $T_b$  deve ser compatível com a menor constante de tempo de interesse, i.e.  $\tau_{min}$  (Aguirre, 2007), a qual é obtida via resposta ao degrau da planta. Há ainda como relacionar os parâmetros sobreditos da SBPA e frequências mínima e máxima de interesse, i.e.  $f_{min}$  e  $f_{max}$ , respectivamente, ao satisfazer (Aguirre, 2007):

$$\frac{1}{10f_{max}} \leq T_b \leq \frac{1}{3f_{max}}, \quad (1)$$

$$n = \mathbf{int} \left[ \log_2 \left( \frac{1}{f_{min}T_b} + 1 \right) \right] + 1, \quad (2)$$

$$f_{min} = \frac{1}{(2^n - 1)T_b} = \frac{1}{NT_b}. \quad (3)$$

Para a escolha da frequência de amostragem  $f_s$  costuma-se considerar o uso de frequência 4 a 10 vezes mais rápida que  $f_{max}$  (Astrom e Wittenmark, 2011), tal que a frequência de Nyquist,  $f_N = f_s/2$ , possa abarcar as frequências de interesse do processo.

Neste artigo, nos procedimentos experimentais com o tanque de nível, o sinal SBPA será somado ao sinal de entrada do processo para a coleta dos dados de identificação. Esse sinal foi um sinal quadrado, oriundo de um controlador *On-Off* empregado para que o processo permanecesse em um ponto de operação de interesse.

## 2.2 Escolha da estrutura e ordem do modelo

Considere o seguinte modelo de processo:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)v(k), \quad (4)$$

definido no domínio do operador de deslocamento de tempo discreto  $q$ , onde  $qy(k) = y(k+1)$  e  $q^{-1}y(k) = y(k-1)$ ,  $u(k)$  é a entrada,  $y(k)$  é a saída e  $v(k)$  é um ruído Gaussiano, média nula e variância  $\sigma_v^2$ . Os polinômios deste modelo são definidos como:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} \cdots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (5)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b} \quad (6)$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} \cdots + c_{n_c}q^{-n_c} \quad (7)$$

O modelo em (4) é denominado de auto-regressivo média-móvel com entrada exógena (ARMAX), no qual se considera o caso de ruído colorido, definido pela parcela  $C(q)v(k)$ . Quando  $C(q) = 1$  tem-se o caso de ausência da parte média-móvel, modelo designado ARX.

A escolha da estrutura depende muito da necessidade de se escolher um valor adequado para a ordem do processo, pois um modelo de ordem menor pode reproduzir a mesma dinâmica do de ordem maior. Outrossim, uma ordem maior que a necessária pode acarretar estimação de parâmetros mal condicionada. Caso a estrutura requerida seja para uma técnica de controle estocástico, a estrutura ARMAX é ideal, pois o modelo estimado terá uma parte determinística e uma parte estocástica, em separado (Silveira e Coelho, 2011).

Uma forma de avaliar a ordem do modelo é o critério de informação de Akaike (AIC), definido como um índice (Akaike, 1974)

$$I_{AIC}(n_\theta) = N \ln [\sigma_v^2(n_\theta)] + 2n_\theta, \quad (8)$$

sendo  $N$  o número de amostras,  $\sigma_v^2(n_\theta)$  a variância do erro de modelagem (erro de predição de um passo à frente ou resíduos) e  $n_\theta = \dim[\theta]$  é o número de parâmetros do modelo. Esse índice atinge um mínimo para um determinado número de parâmetros do modelo e, ao passar pelo mínimo, quando evidenciar um joelho, o procedimento pode ser terminado.

Outro índice que orienta a escolha da estrutura do modelo é o critério do erro final de predição (FPE) (Akaike, 1974)

$$FPE(n_\theta) = N \ln [\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + N \ln \left[ \frac{N + n_\theta}{N - n_\theta} \right], \quad (9)$$

Uma importante maneira de analisar a estimação dos modelos é verificar como se comportam os resíduos, via função

de correlação cruzada (FCC) (10) e de autocorrelação (FAC) (11),

$$FCC = r_{uy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{N=-1}^N u(i)y(i+k), \quad (10)$$

$$FAC = r_{uu}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{N=-1}^N u(i)u(i+k). \quad (11)$$

## 3. PROJETO DO CONTROLADOR

### 3.1 Controlador GMV

Conforme descrito em Clarke e Gawthrop (1975), o controlador GMV assume a seguinte lei de controle generalizada  $d$  passos à frente

$$Q(q^{-1})u(k) = T(q^{-1})y_r(k+d) - P(q^{-1})y(k+d) \quad (12)$$

onde os polinômios  $Q(q^{-1})$ ,  $T(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  filtram, respectivamente, o sinal de controle, a referência e a saída.

O problema de controle GMV estabelece que uma saída generalizada e a  $d$  passos a frente (Clarke e Gawthrop, 1975)

$$\phi(k+d) = P(q^{-1})y(k+d) - T(q^{-1})y_r(k+d) + Q(q^{-1})u(k) \quad (13)$$

tende a um valor mínimo, de acordo com a minimização do índice de desempenho quadrático,

$$J = E [\phi^2(k+d)] \quad (14)$$

onde o operador  $E[\cdot]$  representa a esperança matemática. Utilizou-se o GMV incremental (uma vez que o modelo é tipo 0), objetivando-se forçar o sistema a ter erro de regime nulo, obtendo-se um modelo aumentado ARIMAX (do inglês, *Auto-Regressivo Integrated Moving-Average with exogenous inputs*)

$$\Delta A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + C(q^{-1})\xi(k), \quad (15)$$

onde  $\Delta = 1 - q^{-1}$  é a forma digital do integrador.

Para a minimizar (14) há a necessidade de prever  $y(k+d)$  e, considerando o modelo aumentado deslocado  $d$ -passos à frente, em (16), temos

$$\Delta A(q^{-1})y(k+d) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})\xi(k+d). \quad (16)$$

Para reduzir os erros provenientes dos ruídos no futuro (Silveira e Coelho, 2011), o preditor de mínima variância é dado por

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(q^{-1})E(q^{-1})u(k) + F(q^{-1})y(k)}{A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}F(q^{-1})}, \quad (17)$$

onde os polinômios  $E(q^{-1})$  e  $F(q^{-1})$  são obtidos pela solução da equação de Diophantine (Pinheiro et al., 2016)

$$P(q^{-1})C(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}F(q^{-1}). \quad (18)$$

De acordo com Silveira e Coelho (2011) e Clarke e Gawthrop (1975), a ordem e a forma canônica dos polinômios são definidos como (Silveira et al., 2018; Dutra, 2018)

$$n_e = \deg(E(q^{-1})) = d - 1, \quad (19)$$

$$n_f = \deg(F(q^{-1})) = \max[(n_p + n_c), (n_a + n_e)] - d. \quad (20)$$

Substituindo (17) na minimização de (14), temos a ação de controle incremental do GMV

$$\Delta u(k) = \frac{C(q^{-1})T(q^{-1})y_r(k+d) - F(q^{-1})y(k)}{B(q^{-1})E(q^{-1}) + C(q^{-1})Q(q^{-1})}, \quad (21)$$

sendo a lei de controle a ser aplicada em um sistema tipo 0, da forma

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1). \quad (22)$$

### 3.2 Argumentação estocástica do controlador PID digital

Considerando o controlador PID contínuo por

$$U(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad (23)$$

sendo  $k_p$  o ganho proporcional e  $T_i$  e  $T_d$  os períodos integral e derivativo, respectivamente.

Aplicando-se a aproximação *backward*,

$$s \cong \left( \frac{1 - q^{-1}}{T_s} \right), \quad (24)$$

em (23), o controlador PID digital pode ser calculado como

$$(1/k_p)\Delta u(k) = (p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2})[y_r(k) - y(k)], \quad (25)$$

onde se tem

$$Q(q^{-1}) = (1/k_p), \quad P(q^{-1}) = T(q^{-1}), \quad e \quad (26)$$

$$p_0 = 1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s}, \quad p_1 = -1 - \frac{2T_d}{T_s}, \quad p_2 = \frac{T_d}{T_s}. \quad (27)$$

Reescrevendo (16) e embutindo os polinômios de (28) dentro da saída generalizada do GMVC, para realizar a AE, obtém-se:

$$\phi(k+d) = (p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}) [y_r(k+d) - y(k+d)] + (1/k_p)u(k), \quad (28)$$

A partir de (28), ocorre a implementação do PID preditivo e estocástico, baseado na lei de controle GMVC.

$$\Delta u(k) = \frac{C(q^{-1})T(q^{-1})y_r(k+d) - F(q^{-1})y(k)}{B(q^{-1})E(q^{-1}) + C(q^{-1})(1/K_p)}, \quad (29)$$

### 3.3 GMVC baseado no desempenho do controlador PID

O projeto do controlador PID é realizado via técnica de cancelamento dinâmico de polos, que garante o erro nulo em regime permanente e convergência monotônica a resposta ao degrau. Para impor a dinâmica de malha fechada desejada, necessitamos realizar a seguinte transformação ZOH,

$$G_{mf}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \xrightarrow{\text{ZOH}} \frac{1}{T_s} G_{mf}(z) = \frac{(1 - z_d)z^{-1}}{1 - z_d z^{-1}} \quad (30)$$

Em (30),  $z_d = e^{-T_s/\tau}$  é o polo de malha fechada desejado, definido em função do período de amostragem e da constante de tempo, o comportamento monotônico do sistema. Conforme a alocação desse polo na função de transferência em malha fechada  $G_{mf}$ , ocorre o cancelamento dinâmico,

$$G_{mf}(z) = \frac{\frac{p_0}{\Delta} P(z) \frac{B(1)z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}}{1 + \frac{p_0}{\Delta} P(z) \frac{B(1)z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}}, \quad (31)$$

$$G_{mf}(z) = \frac{p_0 B(1)z^{-1}}{\Delta + p_0 B(1)z^{-1}} = \frac{(1 - z_d)z^{-1}}{1 - z_d z^{-1}}, \quad (32)$$

onde

$$P(z) = 1 + \frac{p_1}{p_0} z^{-1} + \frac{p_2}{p_0} z^{-2}. \quad (33)$$

A solução de (34) fornece  $p_0$ , fazendo-se  $P(q^{-1}) = T(q^{-1})$ , e analogias entre as equações resultam parâmetros  $p_1$  e  $p_2$ ,

$$p_0 = \frac{1 - z_d}{B(1)} = \frac{1 - z_d}{b_0 + b_1}. \quad (34)$$

$$p_1 = a_1 p_0 \quad (35)$$

$$p_2 = a_2 p_0 \quad (36)$$

Calculado  $P(z)$ , este carrega o *shape* de desempenho do controlador PID e fornece ao GMVC, via AE, dada a solução de (18), tal que os parâmetros  $E(q^{-1})$  e  $F(q^{-1})$  do GMVC são dados por (com atraso  $d = 1$ ),

$$e_0 = p_0 \quad (37)$$

$$f_0 = p_0 c_1 + p_1 - e_0 a_1 \quad (38)$$

$$f_1 = p_0 c_2 + p_1 c_1 + p_2 - e_0 a_2 \quad (39)$$

$$f_2 = p_1 c_2 + p_2 c_1 - e_0 a_3 \quad (40)$$

$$f_3 = p_2 c_2 \quad (41)$$

Por fim, atentar que  $Q(q^{-1}) = 1/k_p$  representa uma ponderação do sinal de controle.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Identificação e estimação do modelo

Projetou-se o SPBA com  $f_{min} = 0.08Hz$ ,  $f_{max} = 2,0Hz$ ,  $T_b = 0,165s$ , amplitude  $V = 0,5V$  e  $N = 7$ . Este foi somado ao degrau e excitou a planta, obtendo-se a saída  $y(k)$ , conforme Figura 3.

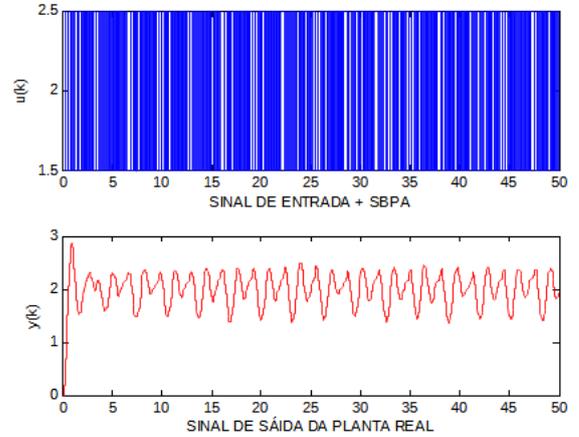


Figura 3. Gerador SBPA (superior); Sinal SBPA aplicado à planta (centro); Resposta desta ao SBPA (inferior).

Após executar o “ident” na janela de comando do MATLAB, carrega-se a *toolbox* de identificação, onde os sinais de entrada e saída são carregados e reprocessados, removendo-se médias e tendências deles. De um total de 1000 amostras, metade foi usada para obtenção do modelo e a outra metade para validá-lo.

### 4.2 Seleção de estruturas e estimação

As estruturas escolhidas para modelarmos a planta são ARX e o ARMAX, as quais são analisadas pela seleção

Modelo	Loss Function	FPE
arx411	0,00014428	0,000148888
amx2221	0,000179381	0,000183695

Tabela 1. Índices de desempenho dos modelos

da ordem, comparação entre modelo e saída da planta, e computo da FAC e FCC (resíduos).

Três modelos ARX e um ARMAX foram estimados e seguiram-se as etapas de mensurar e comparar os modelos com a planta real, conforme Figura 4. Dois modelos aproximara-se mais do sistema real, o arx441 e o amx2221, conforme Tabela 1.

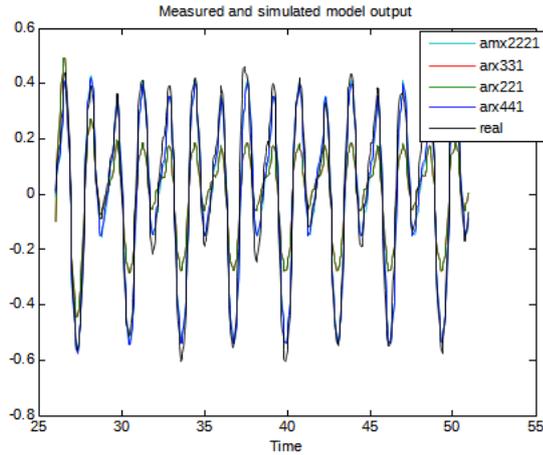


Figura 4. Comparação entre os modelos e a saída da planta.

Foram analisados os dois melhores modelos, os quais têm sua parte ótima (função custo) e índice FPE, conforme Tabela 01.

Na análise de índices e dos resíduos, verificou-se que a FAC e a FCC são similares, com o modelo arx441 prevalecendo um pouco melhor sobre o ARMAX, mas com uma diferença mínima, conforme Figura 5. Para escolher

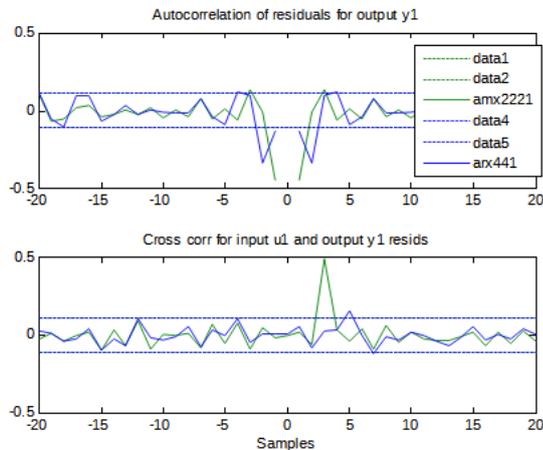


Figura 5. FAC e FCC dos melhores modelos.

o modelo, optou-se pelo de menor ordem (armax2221), onde a planta a ser controlada possui um alto grau de

Parâmetro	Valor
$p_0$	4,5826
$p_1$	-1,3491
$p_2$	-3,2188

Tabela 2. Parâmetros do Controlador PID

Parâmetro	Valor
$e_0$	4,5826
$f_0$	2,8948
$f_1$	-1,6455
$f_2$	-1,7998
$f_3$	0,5572
$k_p$	1,0

Tabela 3. Parâmetros do Controlador GMV

ruído nos sensores capacitivos e o controlador GMV possui características determinísticas e estocásticas separadas, intervindo com isso nas perturbações que estão somadas em conjunto com o polinômio  $C(q^{-1})\xi(q^{-1})$ .

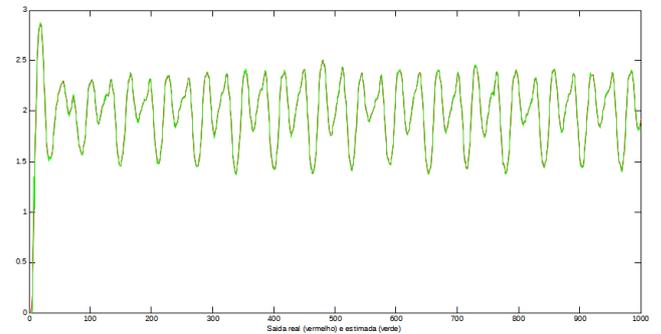


Figura 6. Comparação do modelo armax2221 com a planta real.

#### 4.3 Especificações e projeto do controlador

Para o projeto por cancelamento dinâmico especificou-se como constante de tempo em malha fechada,  $\tau = 1,5s$ , que fornece o polo de malha fechada desejado  $z_d = 0,9672$ , dado o período de amostragem de 50 ms. Foram efetuados testes práticos para o controle do tanque de nível, um com a referência (SP) em 1,5 V e outro com a  $SP = 2,5V$ . Os parâmetros do PID digital são apresentados na Tabela 2. Os parâmetros do GMVC obtidos da solução da equação Diophantine (18), são apresentados na Tabela 2.

O desempenho dos controladores projetados foi verificado via testes práticos, bem como o cálculo dos seguintes índices de desempenho: variância da saída generalizada,  $\sigma_\phi^2$ , variância do sinal de controle,  $\sigma_{u(k)}^2$ , a integral do erro quadrático,  $ISE$ , e a integral do sinal de controle quadrático,  $ISU$ , de acordo com Silveira et al. (2016) e mostrado em (42).

$$ISU = \int u^2(t)dt \cong \sum_{i=1}^N u_i^2 T_s = (u^T u) T_s \quad (42)$$

onde  $u$  é o sinal de controle aplicado ao sistema. Este índice  $ISU$  é utilizado para dimensionar a quantidade de energia contida no sinal de controle. Já o índice integral do erro quadrático ( $ISE$ ) é análogo ao anterior, vide (43), proporcionando grandes ponderações para erros grandes e pequenas variações para erros pequenos,

$$ISE = \int e^2(t)dt \cong \sum_{i=1}^N e_i^2 T_s = (e^T e) T_s. \quad (43)$$

#### 4.4 Testes práticos: Rastreamento de referência

Conforme informado no início desta seção, foram realizados testes de rastreamento de referência para o nível do tanque, para níveis de tensão de 1,5 V e 2,5 V. A Figura 7 ilustra os testes realizados, com o uso do aplicativo daquino (escrita e aquisição, identificação e controle) e microcontrolador Arduino, utilizado para aplicar o algoritmo de controle na planta, dentro da faixa de 0 a 5 V. Durante os testes práticos, observou-se que os sensores capacitivos são bem ruidosos.

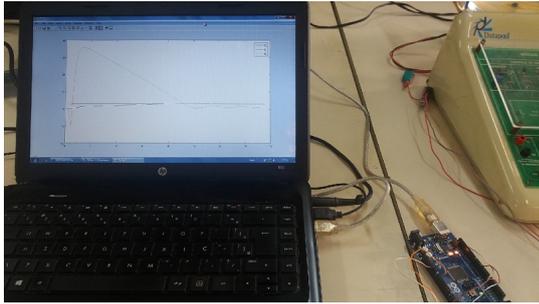


Figura 7. Testes práticos com identificação e controle da planta.

A Figura 8 ilustra o primeiro teste de rastreamento de referência tipo degrau.

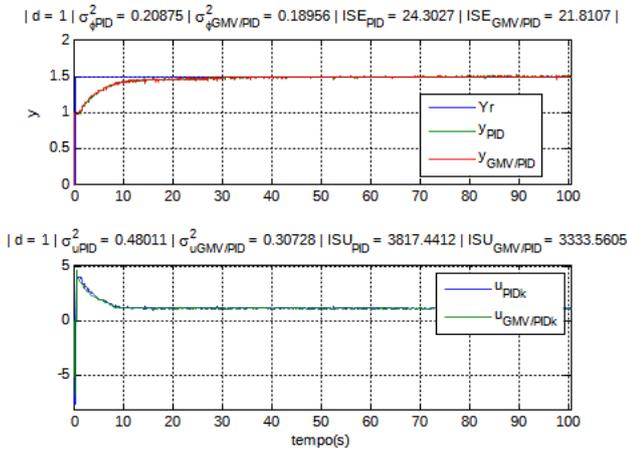


Figura 8. Rastreamento para  $SP = 1,5V$ .

Verifica-se que o rastreamento ( $SP = 1,5V$ ) realizados pelos controladores apresentam desempenhos similares e adequados, pois o GMV foi especificado conforme o *shape* do PID. A partir dos índices de desempenho na Tabela 4, comparam-se os dois controladores e observa-se que o GMV têm desempenho bastante similar ao do PID, com menores gasto energético e variação nos sinais de saída e de controle, como retratados nos índices menores do GMV.

A Figura 9 ilustra o segundo teste prático de rastreamento de referência degrau.

Controlador	$\sigma_{\phi}^2$	$\sigma_u^2$	$\sigma_y^2$	ISU	ISE
PID	0,2088	0,4801	-	3,8174e+03	24,30
GMV	0,1896	0,3073	-	3,3336e+03	21,81

Tabela 4. Índices de desempenho dos controladores PID e GMV ( $SP = 1,5V$ ).

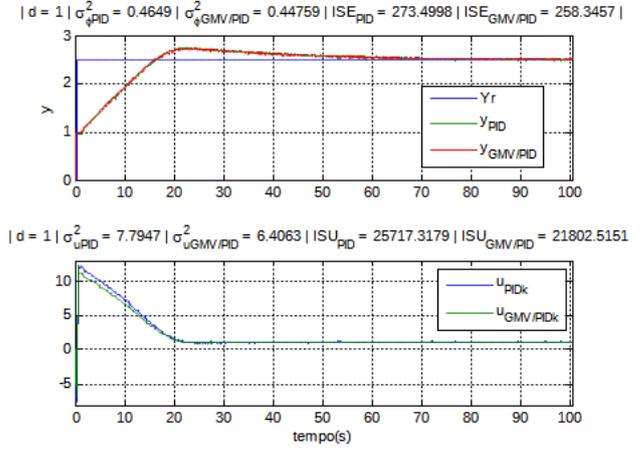


Figura 9. Teste prático: rastreamento para referência em 2,5 V.

Controlador	$\sigma_{\phi}^2$	$\sigma_u^2$	$\sigma_y^2$	ISU	ISE
PID	0,4649	7,7947	-	2,5717e+04	273,4998
GMV	0,4476	6,4063	-	2,1803e+04	258,3457

Tabela 5. Índices de desempenho dos controladores PID e GMV ( $SP = 2,5V$ ).

Controlador	PID	GMV
GM	0,0019	14,36dB
PM	0,0127	47,69°

Tabela 6. Índices de robustez ( $SP = 2,5V$ )

Vê-se um rastreamento de desempenho também satisfatório, e a Tabela 5 mostra, que o GMV apresenta novamente tem índices de desempenho melhores que os do PID, economizando energia no controle da planta.

A Tabela 5 mostra que o controlador GMV se encontra dentro do range de ganho (0 a 15 dB) e de fase (0 e 60°). O controlador GMC se revela robusto as perturbações, consegue boa predição a erros que afetem o controle do nível da planta e tratam bem as variações os sinais graças ao seu comportamento estocástico. As curvas de sensibilidade e sensibilidade complementar (Figuras 06 e 07), ilustram a robustez do GMV e PID, às frequências naturais elevadas e ruídos.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou resultados experimentais da aplicação de uma técnica de projeto que acrescenta características de controle estocástico ao controlador PID digital, melhorando a sua capacidade de tratar perturbações do tipo ruído de processo e de medição.

O modelo estimado e o SPBA que excitou a planta foram adequados já que explicitaram informações de interesse da

mesma, resultando no controle a contento de um processo real com base naquele.

As análises atestaram que, dependendo da aplicação, pode-se utilizar um modelo de menor ordem, desde que forneça informações de interesse para a síntese do controlador e atendimento às especificações de malha fechada da planta real. Isto foi comprovado pelo projeto do controlador GMV, que rastreou a referência ao degrau e minimizou a ação dos ruídos nos testes.

O controlador GMV fomenta brilhantemente a ideia de o operador de uma indústria de enxergar a ação de controle clássica de um PID determinístico e, por ter uma máscara de uma ação preditiva e estocástica, a partir de seu modelo aumentado pelo método da AE, melhora seu desempenho e robustez, corroborado pelo presente estudo de caso, ser eficaz na antecipação (no sentido de ter a habilidade de compensar atrasos discretos da planta) e intervenção em plantas ruidosas.

Os controladores têm equivalência devido ao projeto deles, contudo o controlador GMV é menos sensível à variação dos sinais de saída e de ação de controle, dada sua característica de otimalidade, que repercutiu em menor dispêndio energético, respaldado por seus índices de desempenho.

Na AE, contida no controlador GMV e herdada do PID, a inserção do modelo da planta se fez presente e muito providencial, e mostrou a influência de cada polinômio, seja no caso determinístico ou no estocástico, fornecendo informações importantes para tratar perturbações precisamente, conferindo maior robustez ao PID.

Analisar a AE em processos de diferentes dinâmicas são trabalhos futuros relacionados ao tema do presente artigo.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Federal do Pará, ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/UFPA, ao LACOS/UFPA e ao Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar/Marinha do Brasil.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora da UFMG, MG, Brasil, 3ª edição.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6), 716–723.
- Åström, K.J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*. Dover Books on Electrical Engineering Series. Dover Publications.
- Astrom, K.J. e Wittenmark, B. (2011). *Computer-controlled systems: theory and design*. Dover Publications, Mineola, NY, USA, 3rd edition.
- Clarke, D.W. e Gawthrop, P.J. (1975). Self-tuning controller. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 122(9), 929–934.
- Coelho, A.A.R. e Coelho, L.d.S. (2015). *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. Editora da UFSC, 2ª Ed., Florianópolis, SC, Brasil.
- Dutra, B.G. (2018). *Metodologia para Estimação de Intenção de Movimento e Controle em tempo real de Prótese Mioelétrica de mão: Uma Abordagem Linear, Preditiva e Estocástica*. Master's thesis, UFPA, Belém, Brasil.
- Lucas, K.E., Pagano, D.J., Plaza, D.A., Vaca-Benavides, D.A., e Ríos, S.J. (2020). Stochastic control for DC-DC power converters: A generalized minimum variance control approach. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 13410–13417.
- Pinheiro, T.C.F., Silva, A.F., Silveira, A.S., e Araújo, M.S. (2016). Stochastic augmentation by generalized minimum variance control with rst loop-shaping. In *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 1–6.
- Silva, A.F. e Silveira, A.S. (2018). Augmentacao estocastica de controlador PID para o controle da malha de altitude do quadrimotor AR.Drone 2.0. In *Congresso Brasileiro de Automática 2018*.
- Silveira, A.S. e Coelho, A.A.R. (2011). Generalised minimum variance control state-space design. *Control Theory and Applications, IET*, 5(15), 1709–1715.
- Silveira, A., Trentini, R., Coelho, A., Kutzner, R., e Hofmann, L. (2016). Generalized minimum variance control under long-range prediction horizon setups. *ISA Transactions*, 62(1), 325 – 332.
- Silveira, A.S., Silva, A.F., Real, J.A.F., e Silva, O.F. (2018). Centralized multivariable lqg control system for longitudinal and lateral speed hold autopilot for the AR.Drone 2.0 quadcopter. In *Proceedings of the XXII Brazilian Conference on Automatica*.
- Silveira, A.S. (2023). DaqDuino. (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/50784-daquino>), MATLAB Central File Exchange. Accessed: May 10, 2023.