

Controlador de Variância Mínima Generalizado baseado no PID através da Aumento Estocástica para um Sistema Multivariável

Jahyrã L. S. Cruz, Antonio S. Silveira, José A. F. Real, Bruno G. Dutra e Luís P.B de Souza*

Laboratório de Controle e Sistemas, PPGEE, Universidade Federal do Pará

*Núcleo Avançado de Análise de Tensões, PPGEM, Universidade Federal do Pará

Rua Augusto Corrêa, 479, 66075-110, Guamá, Belém-PA, Brasil

jahyleal@gmail.com, asilveira@upa.br, real@ufpa.br, brunodutra@ufpa.br e luisbrasil55@gmail.com

Resumo — Este artigo tem como objetivo apresentar a **augmentação estocástica, aplicada ao controlador preditivo de variância mínima generalizado (GMV), o qual é baseado em um controlador linear (PID). A referida técnica de controle foi aplicada em um processo multivariável de bancada composto por um Helicóptero com dois graus de liberdade, em que foi considerado o desacoplamento das variáveis de estado para permitir uma lei de controle descentralizada.**

Palavras Chave— **augmentação estocástica multivariável, gmv-pid, variância mínima, controle descentralizado multivariável.**

Abstract — This Article has as goal present the **stochastic augmentation, applied in a predictive generalized minimum variance control (GMV), the which is based on a linear control (PID). The referred control technique was applied in a process multivariable of bench compound of a helicopter with two degree of freedom, on what was considered the decoupling of variables of state to have a control law decentralized.**

Keywords — **stochastic augmantation multivariable, gmv-pid, minimum variance, decentralized control multivariable.**

I. INTRODUÇÃO

A maioria dos processos industriais são multivariáveis com interações entre as variáveis de processo, de forma que essas interações podem ser consideradas um distúrbio do próprio sistema, devido ao acoplamento de suas variáveis, em que este acoplamento pode causar problemas no desempenho do sistema, levando este a instabilidade, portanto, o processo se torna mais complexo para aplicação do sistema de controle. Devido aos problemas das perturbações presentes nos ambientes industriais, leis de controle avançadas, como o controlador de variância mínima generalizado (GMV) o qual é baseado em predição, são mais adequados, apresentando características superiores quando comparado aos controladores clássicos (PID), no que se refere a rejeição a perturbação, variância do sinal de saída e gasto energético.

Considerando os problemas citados anteriormente, neste artigo optou-se por um processo do tipo multivariável (MIMO, *Multiple Input-Multiple Output*), não-linear e com distúrbio de acoplamento, o qual foi tratado de forma descentralizada, gerando dois sistemas SISO (*Single Input-Single Output*) para facilitar a aplicação da lei de controle. De modo que este sistema representa a dinâmica de uma grande parte dos processos industriais.

Além de utilizar o controlador GMV [2] que oferece um tratamento adequado para distúrbios, é apresentada também a augmentação estocástica [13], que acrescenta propriedades estocásticas a controladores determinísticos. A forma de

augmentação estocástica adotada neste artigo usa o GMV baseado no controlador linear PID (Proporcional-Integral-Derivativo), o qual transfere as suas características de sintonia e desempenho ao GMV.

Para o presente artigo foi realizado a seguinte contribuição: A augmentação estocástica será aplicado pela primeira vez em um sistema multivariável com distúrbios de acoplamento, tratado de forma descentralizada.

O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção II, III e IV são apresentados as teorias e os algoritmos do controlador GMV, PID e a augmentação estocástica, respectivamente. Na seção V, é apresentada a análise de robustez. Na seção VI, são apresentadas as equações dinâmicas do processo experimental baseado em um helicóptero com dois graus de liberdade e obtém-se os resultados na seção VII. Na última seção são feitas conclusões em relação ao desempenho dos controladores apresentados na seção IV.

II. CONTROLADOR DE VARIÂNCIA MÍNIMA GENERALIZADO - GMV

O controlador de variância mínima (*Minimum Variance-MV*) foi proposto por Aström e Wittenmark em 1970, de acordo com [16]. Este controlador objetiva regular a saída em relação a referência desejada, fazendo com que o efeito do ruído (variância) na saída, seja mínimo. Além disso, possui um preditor o qual é baseado na função de transferência do processo que calcula a ação de controle atual e permite que as saídas futuras sigam a trajetória desejada [11].

Posteriormente, Clarke e Gawthrop em 1975 apresentaram o controlador de variância mínima generalizado [6], o qual deriva a lei de controle por meio da minimização da função de custo que está associada ao conceito de sistemas generalizados, para garantir o menor consumo de energia na presença de perturbações [11], além disso é um controlador preditivo baseado em modelo, ou seja, herda as características do modelo do projeto e de suas variáveis [1]. O controlador de variância mínima generalizado assume duas estruturas uma no caso posicional e a outra no caso incremental. Para execução deste projeto foi escolhido o caso incremental, devido a utilização da técnica da augmentação estocástica e por apresentar características de robustez em relação ao rastreamento assintótico e garantir a rejeição da perturbação de carga na entrada e na saída do processo [1].

O problema de otimização do controlador GMV pode ser resolvido a partir da equação incremental de saída generalizada e a d-passos à frente dada pela equação (1) em

que, $\Delta = 1 - z^{-1}$, representa a forma incremental por modelo autumentado,

$$\phi(k+d) = P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})yr(k+d) + Q(z^{-1})\Delta u(k) \quad (1)$$

Os polinômios $P(z^{-1}), T(z^{-1})$ e $Q(z^{-1})$, em (1) filtram as sequências de saída, referência e controle, respectivamente [1].

Minimizando o, $J = E[\phi^2(k+d)]$, onde, $E[.]$ representa a esperança matemática. Derivando J em função do sinal de controle $u(k)$ e igualando-se a zero, ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u(k)} = 0 \quad (2)$$

O problema de otimização em (2) se estabelece em relação de $\Delta u(k)$, o sinal de controle aplicado ao processo será:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \quad (3)$$

Nos Controladores preditivos a escolha do modelo influencia diretamente no seu desempenho, de tal forma que o modelo escolhido deve ser capaz de capturar a dinâmica do processo de forma que as saídas futuras sejam previstas precisamente além de serem simples para implementação [8], com isso o modelo ARIX (*Auto-Regressive Integrated with Exogenous Inputs*) foi escolhido para obter a lei de controle e representar a dinâmica da planta.

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})\Delta u(k) + \xi(k) \quad (4)$$

onde $d \in \mathbb{N}^*$ é o atraso de tempo discreto, $y(k) \in \mathbb{R}$ é a sequência de saída, $u(k) \in \mathbb{R}$ a entrada e $\xi(k) \in \mathbb{R}$ é uma sequência aleatória do tipo ruído branco de variância σ_ξ^2 , em que o distúrbio de acoplamento do sistema, será adicionado na equação como a variável de ruído branco $\xi(k)$.

Por meio da resolução da Diophantine, serão calculados os polinômios $P(z^{-1}), E(z^{-1})$ e $F(z^{-1})$, a partir de $A(z^{-1})$

$$P(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}) \quad (5)$$

Os polinômios $E(z^{-1})$, de ordem n_e , e $F(z^{-1})$, de ordem n_f , são determinados na equação Diophantine, a partir da condição,

$$n_e = d - 1 \quad (6)$$

$$n_f = \max[(n_p + n_c), (n_{\delta a} + n_e)] - d \quad (7)$$

onde $n_{\delta a}$ é a ordem dos polinômios de ΔA , n_p é a ordem do polinômio $P(z^{-1})$ e d representa o atraso igual a 2. A lei de controle incremental para o controlador GMV pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta u(k)_{GMV} = \frac{P(z^{-1})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1})} \quad (8)$$

III. CONTROLADOR PID

O PID é um controlador clássico utilizado em diversos projetos, em que a sua estrutura de sintonia baseia-se no ajuste de três ganhos (proporcional, integral e derivativo), devido a simplicidade e boa aceitação no meio industrial, a sua implementação pode ser adaptada com outras técnicas avançadas para melhorar o desempenho do sistema de controle, quando aplicado em problemas mais complexos [9]. No referido projeto foi escolhido o PID em sua forma discreta, baseado em um controlador contínuo PID Ideal (9), tendo os seus parâmetros sintonizados através do método de cancelamento dinâmico.

A lei de controle contínuo do PID convencional é dada por:

$$u(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (9)$$

onde $e(t) = y_r(t) - y(t)$, é o erro do sistema, $y_r(t)$ é o sinal de referência, $y(t)$ é o sinal de saída, K_c é o ganho proporcional, T_i é o tempo integral e T_d é o tempo derivativo.

Já que o controlador será utilizado no domínio discreto, a lei de controle do PID é apresentada na seguinte equação, onde foi utilizado o método Backward para discretização.

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = K_c & \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) e(k) \\ & - K_c \left(1 + 2 \frac{T_d}{T_s} \right) e(k-1) \\ & + \frac{K_c T_d}{T_s} e(k-2) \end{aligned} \quad (10)$$

onde $\Delta = (1 - z^{-1})$ é o operador de diferença discreto e T_s é o período de amostragem.

Reescrivendo a lei de controle do PID digital obtemos a seguinte equação, em que s_0, s_1 e s_2 , são os parâmetros do controlador:

$$\Delta u(k) = s_0 e(k) + s_1 e(k-1) + s_2 e(k-2) \quad (11)$$

Chamando, $C(z^{-1})$ a função de transferência discreta do controlador PID digital, mostrada em (11) e $G(z^{-1})$ a função de transferência discreta de uma planta de segunda ordem, temos,

$$C(z^{-1}) = \frac{(s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2})}{\Delta} \quad (12)$$

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})z^{-1}}{A(z^{-1})} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (13)$$

Portanto, a função de transferência de malha fechada (14) considerando-se a realimentação unitária e o método do cancelamento dinâmico a partir de (12) e (13), obtém-se:

$$G_{mf}(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})G(z^{-1})}{1 + C(z^{-1})G(z^{-1})} = \frac{(1 - z_d)z^{-1}}{1 - z_d z^{-1}} \quad (14)$$

onde, z_d é o polo discreto desejado do sistema em malha fechada.

$$z_d = e^{-\frac{T_s}{\tau MF}} \quad (15)$$

Os parâmetros s_0 , s_1 e s_2 do controlador PID, definido em (14) são obtidos da seguinte forma:

$$s_0 = \frac{(1 - z_d)}{(b_0 + b_1)} \quad (16)$$

$$s_1 = a_1 s_0 \quad (17)$$

$$s_2 = a_2 s_1 \quad (18)$$

IV. AUGMENTAÇÃO ESTOCÁSTICA GMV-PID

A augmentação estocástica tem por finalidade acrescentar propriedades estocásticas em controladores determinísticos. Já que esses controladores apresentam perda de desempenho em processos que possuem perturbações estocásticas, esta transferência de propriedade será realizada através da transferência de *loop-shaping* da malha do controlador determinístico PID para o controlador estocástico GMV [2].

Do procedimento da augmentação resultará um controlador GMV com propriedades incorporadas do PID, porém este (GMV-PID) atuará melhor do que o PID convencional, devido as características preditivas e de variância mínima do GMV em tratar a ação de ruídos na saída do sistema, para garantir menor consumo de energia, de acordo com [4] e [1]. Para a implementação da augmentação estocástica, deve-se realizar uma analogia entre as equações da lei de controle (8) e (11), em que o PID convencional (11) será baseado na estrutura do GMV (1) para que ocorra a adição das propriedades estocásticas ao controlador determinístico [17].

Com isso, para a analogia tem-se a seguinte lei de controle do PID determinístico em (11), sabendo que $e(k) = y_r(k) - y(k)$.

$$\Delta u(k) = (s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2})(y_r(k) - y(k)) \quad (19)$$

Para que o PID obtenha a forma do GMV em (1) tem-se a seguinte analogia:

$$Q(z^{-1})\Delta u(k) = P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})y_r(k+d) \quad (20)$$

Obtem-se:

$$T(z^{-1}) = P(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} \quad (21)$$

$$Q(z^{-1}) = \lambda \quad (22)$$

onde, λ é o fator escalar que pondera a energia do sinal de controle [1].

E através da equação Diophantine em (5), determina-se os polinômios $E(z^{-1})$ e $F(z^{-1})$,

$$\begin{aligned} e_0 &= s_0 \\ e_1 &= s_1 - a_1 e_0 \\ f_0 &= s_2 - a_2 e_0 - a_1 e_1 \\ f_1 &= -a_2 e_1 - a_3 e_0 \\ f_2 &= -a_3 e_1 \end{aligned} \quad (23)$$

em que estes (23) devem ser substituídos na lei de controle GMV-PID (24), a qual sofreu a implementação da augmentação estocástica:

$$\begin{aligned} \Delta u(k)_{PID} \\ = \frac{(s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + \lambda} \end{aligned} \quad (24)$$

V. ANÁLISE DE ROBUSTEZ

A análise de robustez do controlador GMV-PID e PID será realizada no domínio da frequência, fazendo-se necessário as funções de sensibilidade (25) e sensibilidade complementar (26), de acordo com [14],

$$S(z^{-1}) = \frac{1}{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \quad (25)$$

$$T(z^{-1}) = \frac{G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})}{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \quad (26)$$

onde, $G_p(z^{-1})$ e $G_c(z^{-1})$ são as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente.

Substituindo a equação (8) no modelo aumentado do ARIX em (4) as funções de sensibilidade e sensibilidade complementar do controlador GMV-PID são, respectivamente:

$$S_{gmv-pid}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1}) + \lambda}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})\lambda} \quad (27)$$

$$T_{gmv-pid}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})P(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})\lambda} \quad (28)$$

Da mesma forma, as substituições podem ser feitas para o controlador PID preditivo, substituindo a equação (24) em (4), resultando nas funções de sensibilidade e sensibilidade complementar do controlador PID, respectivamente:

$$S_{pid}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})P(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})\lambda} \quad (29)$$

$$T_{pid}(z^{-1}) = \frac{\lambda}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})\lambda} \quad (30)$$

Em relação à robustez e desempenho do sistema, os seguintes índices serão analisados: a margem de ganho (MG), que está relacionada a frequência crítica e a margem de fase (MF) que está relacionada a frequência de corte de magnitude. De modo para que haja um equilíbrio entre robustez e desempenho, os índices devem estar situados dentro dos seguintes intervalos: MG de 6dB à 15dB e MF de 30° à 60°, de acordo com [1], [5] e [7]. Portanto, dentro desses intervalos no sistema há garantias de robustez e estabilidade.

O cálculo de robustez pode ser encontrado nas equações de (31) à (36).

$$M_s = \max_{\omega} |S(e^{-j\omega T_s})| \quad (31)$$

$$M_t = \max_{\omega} |S(e^{-j\omega T_s})| \quad (32)$$

$$GM_s \geq \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (33)$$

$$PM_s \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2M_s} \right) \left(\frac{180}{\pi} \right) \quad (34)$$

$$GM_t \geq 1 + \frac{1}{M_t} \quad (35)$$

$$PM_t \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2M_t} \right) \left(\frac{180}{\pi} \right) \quad (36)$$

onde, M_s é a função de sensibilidade, M_t é a função de sensibilidade complementar, G_M é a margem de ganho da função de sensibilidade, P_M é a margem de fase da função de sensibilidade, G_{M_t} é a margem de ganho da função de sensibilidade complementar e P_{M_t} é a margem de fase da função de sensibilidade complementar.

A. Índices de desempenho

O desempenho do controlador será avaliado a partir do índice da integral do sinal ao quadrado, que corresponde a quantidade de energia no sistema [3],

$$IS_w = (w^T w) T_s \quad (37)$$

onde w pode representar o erro de rastreamento, o sinal de controle e o sinal de saída generalizada indicados pelos seguintes índices respectivamente, IS_e , IS_u e $IS\phi$.

Além destes índices será utilizada a variância do sinal de controle e da saída generalizada, dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^N (x_i - x_m)^2}{N - 1} \quad (38)$$

em que N é o número de amostras, x_i são os elementos do vetor de dados e x_m é a média de valores [4].

VI. HELICÓPTERO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O helicóptero com dois graus de liberdade, na Fig. 1 é um kit experimental para ensino e pesquisa na área de controle de processo fabricado pela empresa Quanser [10], apresenta características de um sistema não-linear e multivariável. O processo é fixo em uma base mecânica com anéis deslizantes, na qual estão acopladas duas hélices: uma responsável pela elevação (eixo de arfagem) e a outra pelo azimute (eixo de guinada). Ambas são acionadas por meio de motores de corrente contínua. Os ângulos de arfagem e guinada são medidos por dois encoders de alta resolução, um é fixo na lateral para capturar o movimento de arfagem e o segundo é fixo na base do eixo na vertical para capturar o movimento de guinada. A seguinte aplicação e simulação da augmentação estocástica foi utilizado apenas o modelo no espaço de estado do projeto do helicóptero com dois graus de liberdade [10].



Fig. 1. Helicóptero com dois graus de liberdade, QUANSER.

O modelo linearizado, no espaço de estado, do sistema do helicóptero com dois graus de liberdade é descrito através das equações (39) à (51). Considerando $\theta(t), \psi(t)$ são os ângulos de arfagem e a guinada, respectivamente.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (39)$$

$$y = Cx + Du \quad (40)$$

Onde x^T é o vetor de estado definido como:

$$x^T = [\theta(t), \psi(t), \dot{\theta}(t), \dot{\psi}(t)] \quad (41)$$

E o vetor y^T de saída definido a seguir por:

$$y^T = [\theta(t), \psi(t)] \quad (42)$$

Os parâmetros das matrizes (45) e (46) relacionadas a planta encontram-se na Tabela 1 [10].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-B_p}{J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2} & \frac{0}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_y}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{pp} & K_{py} \\ \frac{K_{yp}}{J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2} & \frac{K_{yy}}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

TABELA I

PARÂMETROS DA PLANTA DO HELICÓPTERO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.

Descrição	Símbolo	Valor	Unidade
Constante de força impulso do motor de guinada	K_{pp}	0.204	N.m/V
Constante de torque atuando no eixo da guinada pelo motor da guinada	K_{yy}	0.072	N.m/V
Constante de torque atuando no eixo da arfagem pelo motor da guinada	K_{py}	0.0068	N.m/V
Constante de torque atuando no eixo da guinada pelo motor da arfagem	K_{yp}	0.0219	N.m/V
Atrito Viscoso do motor de arfagem	B_p	0.800	N/V
Atrito Viscoso do motor de guinada	B_y	0.318	N/V
Massa do corpo do helicóptero	m_{heli}	1.3872	kg
Centro de massa do corpo do helicóptero do eixo da arfagem	1	0.186	m
Momento total de Inércia do ângulo de arfagem	$J_{eq,p}$	0.0384	kg.m ²
Momento total de Inércia do ângulo de guinada	$J_{eq,y}$	0.0432	kg.m ²

Após a substituição das constantes apresentadas na Tabela I, obtém-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7913 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Embora o modelo apresente características de acoplamento entre suas variáveis, para reduzir a complexidade da lei de controle, optou-se por analisar o sistema de forma descentralizada, em que a influência do acoplamento é modelada como uma perturbação, ou seja, como se fosse dois sistemas SISO independentes a perturbações externas. De forma que a vantagem desta técnica é reduzir a complexidade de um sistema MIMO e o esforço computacional com os algoritmos que serão simplificados [12].

Como optou-se por uma abordagem entra-saída no tempo discreto e de forma descentralizada dada pela equação $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$, gerando assim uma matriz com quatro funções de transferência em (50). Em que o ângulo de arfagem é representado por (G_{11}) e o ângulo de guinada é representado por (G_{22}) , em (50). E os distúrbios de informações cruzadas entre os eixos $(\theta(t), \psi(t))$ que afetam o sistema, são representados por $(G_{12}$ e $G_{21})$, em (50). De modo que as funções de transferência de 4ª ordem foram reduzidas para um sistema de 2ª ordem, o qual foi discretizado com $T_s = 0.05s$, para ambos os subprocessos [1] e [10]. A matriz de transferência discreta do sistema simplificado é dada por:

$$G(z^{-1}) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$G(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.00255 + 0.002185z^{-1} & 8.51e^{-5} + 7.293e^{-5}z^{-1} \\ 1 - 1.629z^{-1} + 0.6289z^{-2} & 1 - 1.629z^{-1} + 0.6289z^{-2} \\ 0.0002844 + 0.0002683z^{-1} & 0.009339 + 0.0008811z^{-1} \\ 1 - 1.84z^{-1} + 0.8396z^{-2} & 1 - 1.84z^{-1} + 0.8396z^{-2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Na Fig. 2 tem-se a representação de um sistema multivariável com as interações entre as malhas, em relação a entradas e saídas, representando uma estrutura de controle descentralizada [12].

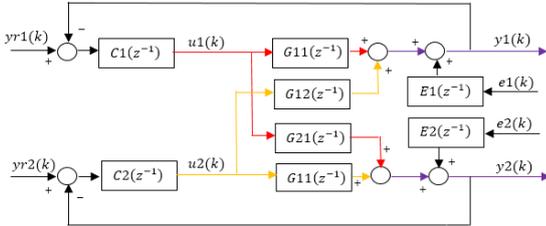


Fig. 2. Representação de um sistema multivariável descentralizado.

As relações entre entradas e saídas representam a dinâmica do sistema descentralizado, em que as equações desta são escritas da seguinte forma:

$$y_1(k) = G_{11}(z^{-1})u_1(k) + G_{12}(z^{-1})u_2(k) \quad (52)$$

$$y_2(k) = G_{22}(z^{-1})u_2(k) + G_{21}(z^{-1})u_1(k) \quad (53)$$

onde, $y_1(k)$ representa a equação de saída do ângulo de arfagem, $y_2(k)$ representa a equação de saída do ângulo de guinada, $u_1(k)$ e $u_2(k)$, representam o distúrbio de acoplamento do próprio sistema, relacionado as informações cruzadas dos eixos.

A estrutura da lei de controle descentralizada é representada da seguinte forma:

$$u_1(k) = C_1(z^{-1})y_{r1}(k) - C_1(z^{-1})y_1(k) \quad (54)$$

$$u_2(k) = C_2(z^{-1})y_{r2}(k) - C_2(z^{-1})y_2(k) \quad (55)$$

onde, $C_1(z^{-1})$ e $C_2(z^{-1})$ representam os controladores dos ângulos de arfagem e guinada, respectivamente. Portanto estes serão tratados como sistemas SISO levando em consideração o acoplamento entre os eixos.

Nota-se que $u_1(k)$ e $u_2(k)$, nas equações (52) e (53) representam a influência do sinal de controle em forma de distúrbio para ambas as saídas, conseqüentemente a partir do momento em que o motor relacionado ao eixo de arfagem entrar em movimento, o sinal de saída $y_1(k)$ do ângulo de arfagem irá causar um distúrbio $u_2(k)$ para o sinal de saída do ângulo de guinada $y_2(k)$ e vice-versa. Visando tratar esta mudança comprometedor para o sistema, o controlador proposto neste artigo, tem por objetivo ser robusto para suportar os distúrbios causado pelo acoplamento do próprio sistema.

VII. RESULTADOS

O desempenho dos controladores de arfagem e guinada foram analisados para os valores de $\lambda = 5$ e $\lambda = 10$, levando em consideração os distúrbios de acoplamento. Em que o comportamento dos controladores foram analisados em termos de sua estabilidade, robustez via análise de *loop-shaping*, índices de desempenho de consumo energético e de variância mínima, onde para a simulação foi utilizado o ambiente de programação do *software* MATLAB.

A. Ângulo de Arfagem

Em seguida será projetado o controlador $C_1(z^{-1})$ para o ângulo de arfagem, o qual é representado pela equação de saída em (52), sendo que a partir da função de transferência (G_{11}) , em (51) são obtidos os polinômios (56) que geram os gráficos da Fig.3 e Fig.4, para os controladores GMV-PID e PID.

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.629z^{-1} + 0.689z^{-2} \quad (56)$$

$$B(z^{-1}) = 0.00255 + 0.002185z^{-1}$$

1) Análise dos Índices de desempenho

Na Fig.3 em que $\lambda=5$, ambos os controladores entram em regime permanente sem *overshoot*, entretanto, o PID obtém maior consumo de energia no sinal de controle para estabilizar o ângulo de arfagem, do que o GMV-PID.

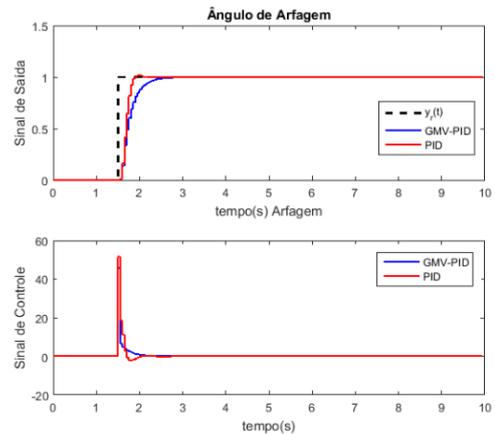


Fig. 3. Teste para o ângulo de arfagem com controlador PID vs GMV-PID, para o caso de $\lambda = 5$.

E na Fig.4 para $\lambda=10$, o controlador PID mostrar-se sensível ao distúrbio de acoplamento que ocorre no sistema, por meio das oscilações presentes no sinal de saída. Enquanto o controlador GMV-PID entra em regime permanente sem *overshoot* e sem grande consumo de energia.

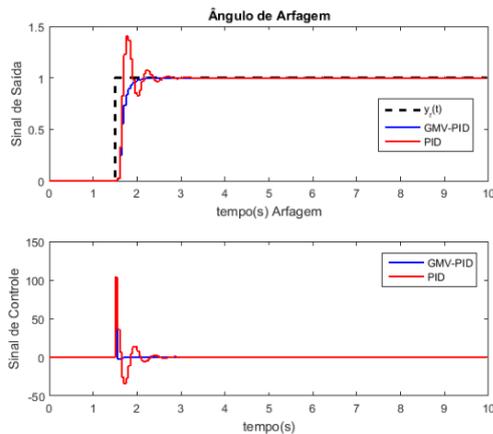


Fig. 4. Teste para o ângulo de arfagem com controlador PID vs GMV-PID, para o caso $\lambda=10$.

Por meio da Tabela II, obtém-se as seguintes conclusões em relação ao GMV-PID e PID para o controle do ângulo de arfagem:

TABELA II.
ÍNDICES DE DESEMPENHO

Caso	Controladores	Índices de Desempenho				
		ISe	ISu	$IS\phi$	σ_u^2	σ_y^2
$\lambda=5$	PID	0.159	157.12	8.260	15.645	0.137
	GMV-PID	0.191	109.04	8.098	10.813	0.136
$\lambda=10$	PID	0.142	761.34	8.445	76.371	0.139
	GMV-PID	0.145	333.57	8.248	33.379	0.136

Observa-se que ambos os controladores levam o sistema para o regime permanente, porém, o controlador GMV-PID obteve resultados com a menor variância em (σ_y^2 e σ_u^2) e consumo de energia em (ISu e $IS\phi$), em relação ao controlador PID. De modo que o controlador GMV-PID mostra a sua capacidade de otimização influenciado pela augmentação estocástica para ambos os casos de λ . Além disto, pode-se observar que existe uma diferença entre os índices de desempenho na Tabela II de ambos os controladores, mas apesar desta diferença o controlador GMV-PID augmentado ainda consegue obter resultados mais satisfatórios em questão de consumo de energia e estabilidade, realizando a mesma tarefa do controlador PID para controle do ângulo de arfagem.

2) Análise de Robustez

A partir das equações de sensibilidade e sensibilidade complementar de (27) a (30) para o controlador GMV-PID e PID, foram obtidos os gráficos nas Fig. 5 e Fig. 6.

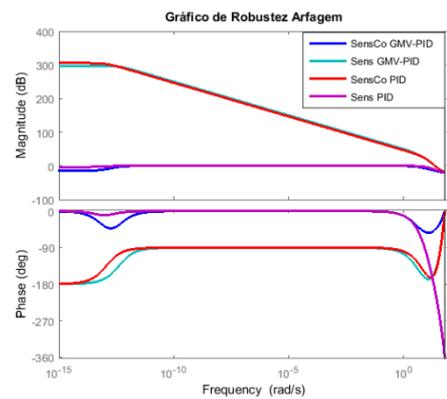


Fig. 5. Funções de Sensibilidade e Sensibilidade complementar para os controladores PID e GMV-PID, para o caso de $\lambda=5$.

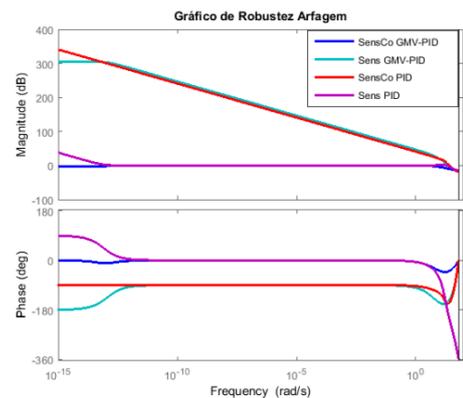


Fig. 6. Funções de Sensibilidade e Sensibilidade complementar, para os controladores PID e GMV-PID, para o caso de $\lambda=10$.

Por meio do cálculo de robustez apresentado na seção 5, foi gerado a tabela III, para o caso de $\lambda=5$ e $\lambda=10$, para os controladores GMV-PID e PID,

TABELA III.
ÍNDICES DE ROBUSTEZ

Caso	Controladores	Índices de Robustez	
		MG	MF
$\lambda=5$	PID	0.0039 dB	60°
	GMV-PID	6.020 dB	60°
$\lambda=10$	PID	0.109 dB	0.716°
	GMV-PID	6.02 dB	60°

em que o controlador GMV-PID por meio da augmentação estocástica, mostrou-se robusto, fazendo com que o sistema seja resistente a perturbações sem tender a instabilidade, com a MG de 6.020 dB e MF de 60°. Já o controlador PID obteve uma MG de 0.0039 dB e a MF de 60°, apresentando índices de robustez insatisfatória para desempenho e estabilidade do sistema, para os dois casos de λ . Com isso, o controlador GMV-PID mostra-se mais adequado para o sistema de controle na presença de distúrbios.

B. Ângulo de Guinada

Em seguida será projetado o controlador $C_2(z^{-1})$ para o ângulo de guinada, o qual é representado pela equação de saída em (53), sendo que a partir da sua função de transferência (G_{22}), em (50) são obtidos os polinômios, que

geram os gráficos das Fig.7 e Fig.8 para os controladores GMV-PID e PID.

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.84z^{-1} + 0.8396z^{-2} \quad (57)$$

$$B(z^{-1}) = 0.009339 + 0.0008811z^{-1}$$

1) Análise dos Índices de desempenho

Na Fig. 7 para o caso de $\lambda=5$, o controlador PID obteve um *overshoot* inicial e após 2 segundos entrou em regime permanente, porém, com um consumo de energia no sinal de controle maior do que o GMV-PID para estabilizar o ângulo de guinada.

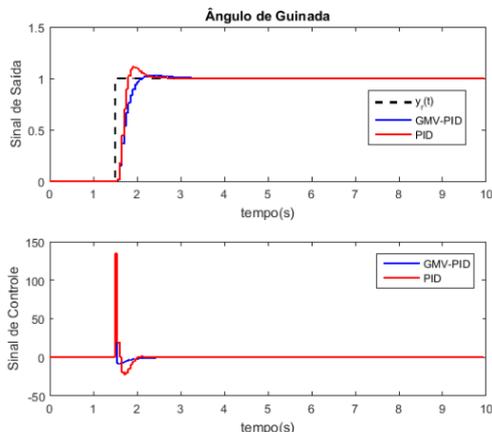


Fig. 7. Teste para o ângulo de guinada com o controlador PID vs GMV-PID para o caso de $\lambda=5$.

E na Fig.8 para o caso de $\lambda=10$, o controlador PID obteve maior *overshoot* e consumo energético, do que o gráfico da Fig.7, pois, quanto maior o valor de λ , maior será esse *overshoot* e consumo de energia, no sistema. Entretanto o controlador GMV-PID manteve a sua estabilidade e otimização de consumo energético para os dois casos de λ .

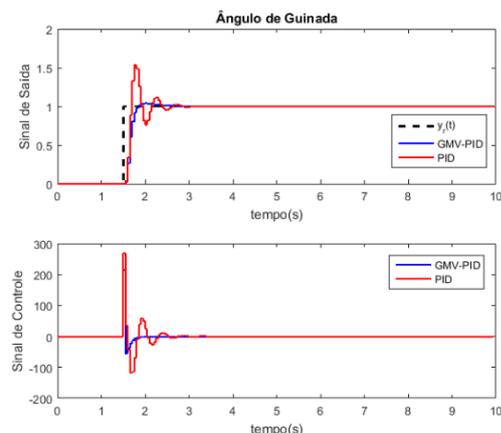


Fig. 8. Teste para o ângulo de guinada com o controlador PID vs GMV-PID, para o caso de $\lambda=10$.

Por meio dos índices de desempenho, na Tabela IV, pode-se concluir que,

TABELA IV.

ÍNDICES DE DESEMPENHO

Caso	Controladores	Índices de Desempenho				
		ISe	ISu	$IS\phi$	σ_u^2	σ_y^2
$\lambda=5$	PID	0.155	10001.3	8.353	100.52	0.139
	GMV-PID	0.177	726.4	8.227	72.893	0.138

$\lambda=10$	PID	0.162	5846.1	8.511	587.4	0.142
	GMV-PID	0.135	2565.5	8.336	257.7	0.137

o controlador GMV-PID, manteve as características de otimização e economia de energia para grande parte dos índices de desempenho, exceto em ISe . De forma que, através dos índices relacionados ao esforço de controle (ISu e σ_u^2), existe uma grande diferença, a qual mostra como o distúrbio de acoplamento afeta a estabilidade do controlador PID em relação ao controlador GMV-PID, tanto para o ângulo de arfagem quanto no ângulo de guinada. Por essa razão, mais uma vez o controlador GMV-PID comprova a sua eficiência "ótima" para sistemas complexos que apresentam perturbações relacionada às informações eixos cruzados.

2) Análise de Robustez

A partir das equações de sensibilidade e sensibilidade complementar em (27) a (30) para o controlador GMV-PID e PID, foram obtidos os gráficos nas Fig. 9 e Fig. 10.

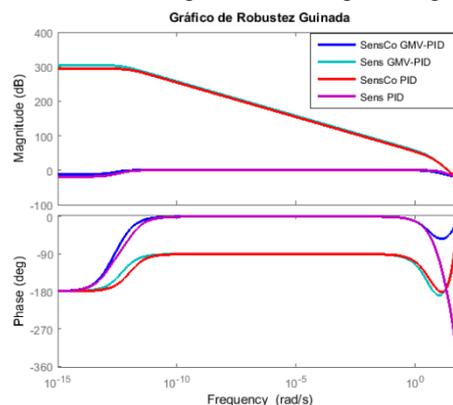


Fig. 9. Funções de Sensibilidade e Sensibilidade complementar, para os controladores PID e GMV-PID, para o caso de $\lambda=5$.

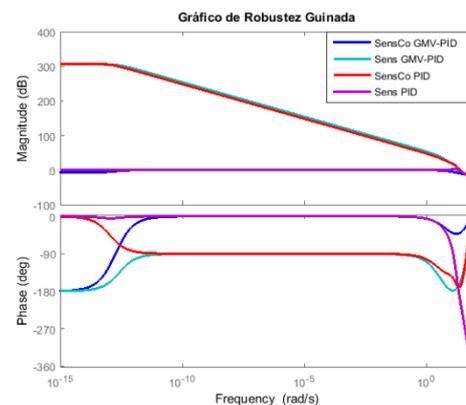


Fig. 10. Funções de Sensibilidade e Sensibilidade complementar, para os controladores PID e GMV-PID, para o caso de $\lambda=10$.

A augmentação estocástica também influencia nas funções de sensibilidade, nas Fig.9 e Fig. 10, de forma que o GMV-PID augmentado consegue tratar melhor as características do distúrbio devido a sua propriedade estocástica, sem que este atue drasticamente no sinal de saída, garantido a robustez do sistema.

Por meio dos índices da tabela V, pode-se concluir que,

TABELA.V
ÍNDICES DE ROBUSTEZ

Caso	Controladores	Índices de Robustez	
		MG	MF
$\lambda = 5$	PID	0.0017 dB	60°
	GMV-PID	6.032 dB	60°
$\lambda = 10$	PID	11.480 dB	43.02°
	GMV-PID	6.024 dB	60°

o controlador GMV-PID, obteve um melhor desempenho quanto a robustez com os índices MG de 6,024dB e MF de 60°, garantindo estabilidade para o sistema de controle de guinada na presença de perturbações. Já o controlador PID mostrou-se inadequado na presença de distúrbios de acoplamento, tanto para o ângulo de arfagem quanto para o ângulo de guinada, pois os índices MG e MF ficaram fora da faixa de robustez exigida pelos autores em [5] e [7], mostrando que o controle PID é sensível aos distúrbios causados pelo sistema e consequentemente tendendo a instabilidade.

VIII. CONCLUSÃO

De acordo com os resultados obtidos para o ângulo de arfagem e guinada, ambos os controladores foram estáveis para o processo, entretanto, o controlador PID apresentou maior consumo de energia para estabilizar o sistema, conforme os índices de desempenho relacionado ao sinal de controle (IS_u e σ_u^2). Além disso, não garante robustez para ambos os subprocessos, em que a margem de ganho e margem de fase estão fora da faixa de robustez exigida pela teoria de controle robusto. No entanto, o controlador aumentado GMV-PID, obteve resultados mais satisfatórios em relação a otimização do sistema, apresentando menor consumo de energia para estabilização da planta, conforme os índices (IS_u e σ_u^2), menor variação no sinal de saída (IS_ϕ e σ_y^2), além de garantir robustez para o ângulo de arfagem e guinada, de acordo com os resultados obtidos na tabela II,III,IV e V. Diante disto, o controlador GMV-PID confirma a sua eficiência ótima para sistemas complexos com perturbações de acoplamento, como o helicóptero com dois graus de liberdade.

Portanto o método da augmentação estocástica contribuiu para o melhor desempenho do controlador GMV-PID em relação ao PID, visto que a augmentação realiza a transferência de *loop-shaping* de um controlador determinístico (PID) para um controlador preditivo e estocástico (GMV), fazendo com que este seja mais robusto e viável para o controle do ângulo de arfagem e guinada na presença do distúrbio de acoplamento.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Pará, ao Laboratório de Controle e Sistemas (LACOS) e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPQ) sob o auxílio de 408559/2016-0.

REFERÊNCIAS

- [1] A.S.Silveira, Contribuições ao controlador de variância mínima generalizada: Abordagem de projeto no espaço de estado, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2012.
- [2] A.F.Silva, Controlador GMV aplicado á regulação do ângulo de passo em um sistema de conversão de energia eólica: Uma abordagem linear, preditiva e estocástica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2017.
- [3] A.S.Silveira, R. Trentini, A. Coelho, R.Kutzner, L. Hofmann, "Generalized minimum variance control under long-range prediction horizon setups". *ISA Transactions*, 62, 325–332, 2016, in press. b
- [4] B.G.Dutra, Metodologia para estimação de intenção de movimento e controle em tempo real de prótese mioelétrica de mão: uma abordagem linear, preditiva e estocástica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2018.
- [5] B.L.Stevens, F.L.Lewis, E.N. Johnson, Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems, 3rd ed, John Wiley & Sons, 2015.
- [6] D.W. Clarke, P. Gawthrop, Self-tuning controller. *Proc. of the Institution of Electrical Engineers*, 122(9), 929–934, 1975. in press.
- [7] D.E.Seborg, D.A. Mellichamp, T.F. Edgar Process Dynamic and Control. 2nd ed, John Wiley & Sons, 2004.
- [8] E.F. Camacho, C. Bordons, Model Predictive Control, New York: Springer, 1998.
- [9] M.C. Cesar, H.C.Teixeira, Controles típicos de equipamentos e processos industriais, 2nd ed. Blucher, 2010.
- [10] Quanser, User manual, Aerospace plant: 2-dof helicopter position control, 2011. unpublished.
- [11] R.B.Araújo, Controladores preditivos filtrados utilizando otimização multiobjetivo para garantir *offset-free* e robustez. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós Graduação em Engenharia de automação e Sistemas, Florianópolis, 2017.
- [12] R.I. Mejía, Controle preditivo multivariável: aspectos de projeto e simulação, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2003
- [13] R. Trentini, A. Silveira, M. Bartsch, R. Kutzner, L. Hofmann "On the desing of stochastic RST controllers based on the Generalized Minimum Variance", 11TH UKACC INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, Belfast, Northern Ireland, UK, 2016. in press.
- [14] S.Skogestad, I.Postlethwaite, Multivariabel Feedback Control Analysing and Desing, 2nd ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [15] T.F.Pinheiro, A.F.Silva, A.S.Silveira, M.Araújo, Stochastic "Augmentation by generalized minimum variance control with rst loop-shaping," Congresso brasileiro de Automática, Vitória, 2016. in press.
- [16] K.J.Astrom, Introduction to stochastic control theory, 1rd ed, Dover Publication, Mineola, New York, 1970.
- [17] A.S.Silveira, A.F.Silva, Hybrid direct self-tuning and fuzzy adaptative control algorithm bio-inspired by muscle-brain connection. Simposio Brasileiro de Automação Inteligente, Rio Grande do Norte, 2015. In press