

# CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL USANDO FUNÇÕES DE LAGUERRE

TARCISIO CARLOS F. PINHEIRO\*, MARYSON DA S. ARAÚJO\*, ANTONIO DA S. SILVEIRA\*, BRUNO GOMES DUTRA\*

\* *Laboratório de Controle e Sistemas, Universidade Federal do Pará.  
Belém, Pará, Brazil.  
cep: 66075-110, R. Augusto Corrêa, 1 - Guamá, Belém-PA.*

Emails: tpinheiro@ufpa.br, maryson@ufpa.br, asilveira@ufpa.br, brunodutra@ufpa.br

**Abstract**— This paper presents the design of a multivariable model predictive controller using Laguerre Functions, for the purpose of demonstrating the benefits and facilities of the application this controller in multiple-input and multiple-output (MIMO) systems. This control strategy is notable for using the state space model, facilitating and generalizing the design for multivariate systems with " $n$ " inputs and " $q$ " outputs. This work also reports simulated tests with the Wood and Berry binary distillation column which is a MIMO *benchmark* system with two inputs and two outputs, also containing transport time delays and coupled outputs. Then, demonstrate the advantages of the method using the Laguerre functions and their efficiency for MIMO systems.

**Keywords**— Orthonormal Functions, Laguerre Functions, Model Predictive Control, Binary Distillation Column, Multivariable Control.

**Resumo**— Este artigo tem como objetivo apresentar o projeto de um controlador preditivo discreto multivariável baseado em modelo usando as Funções de Laguerre, demonstrando os benefícios e facilidades da aplicação deste tipo de controlador em sistemas MIMO (Multiple- Input and Multiple-Output). Esta estratégia de controle se destaca por utilizar o modelo no espaço de estados, facilitando e generalizando o projeto para sistemas multivariáveis com " $n$ " entradas e " $q$ " saídas. Este trabalho também relata simulações com a coluna de destilação binária de Wood e Berry que é um sistema *benchmark* com duas entradas e duas saídas, contendo atrasos de transporte e saídas acopladas. Assim, demonstrando as vantagens do método usando as Funções de Laguerre e sua eficiência para sistemas MIMO.

**Palavras-chave**— Funções ortonormais, Funções de Laguerre, Controle Preditivo Baseado em Modelo, Coluna de Destilação Binária, Controle Multivariável.

## 1 Introdução

O controle preditivo, *a priori*, foi uma resposta às necessidades apresentadas nas indústrias químicas, as quais tinham grandes dificuldades no controle eficiente de processos com múltiplas entradas e múltiplas saídas com restrições. A utilização dessa estratégia de controle foi impulsionada pela crise do petróleo ocorrida na década de 1970 que elevou o preço do dele, fazendo com que as indústrias petroquímicas buscassem formas de otimizar ao máximo a produção de combustíveis e de seus derivados (Richalet and O'Donovan, 2009). Este fato criou um espaço para novos tipos de controladores avançados, quebrando a hegemonia dos Controladores PID (Proporcional Integral Derivativo) no meio industrial em relação a sistemas MIMO, o qual apresenta grandes dificuldades para sintonizar e controlar sistemas multivariáveis (Rosich and Ocampo-Martinez, 2015).

Segundo Mayne et al. (2000), Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC, Model Predictive control), também conhecido como Controle Preditivo de Horizonte Retrocedente (RHC, Recending Horizon Control) é um controlador que gera uma ação de controle,  $u(k)$ , a cada instante de tempo  $k$ , a qual é obtida por meio da solução de um problema de otimização em malha aberta com horizonte de predição finito. Para isso são usados os estados atuais da planta como se fossem os es-

tados iniciais, assim gerando um vetor com uma sequência de sinais de controle, onde somente o primeiro elemento do vetor é aplicado na planta e o restante é descartado.

A origem teórica do MPC se deu a partir do desenvolvimento das técnicas de controle ótimo, onde podem-se destacar o controle linear quadrático (LQ, Linear Quadratic) e controle linear quadrático gaussiano (LQG, Linear Quadratic Gaussian) (Anderson and Moore, 1971). Esses trabalhos foram antecidos pelos trabalhos de Kalman na década de 60 (Kalman et al., 1960b; Kalman et al., 1960a), o qual definiu o conceito de controle ótimo na teoria de sistemas lineares e deu as bases para os controladores preditivos desenvolvidos posteriormente.

Nos últimos anos, avançadas técnicas de controle preditivo como em Dovžan and Škrjanc (2010), Causa et al. (2008) e Potočník et al. (2008), têm sido largamente usadas pelas indústrias petroquímicas, isso por causa do grande desenvolvimento do controle digital que tem se tornado cada vez mais confiável e de custo reduzido. Assim, motivando o desenvolvimento de novas técnicas avançadas de controle preditivo, detre as quais destaca-se o MPC multivariável usando Funções de Laguerre (Wang, 2004; Wang, 2009), que utiliza um conjunto de filtros de Laguerre de base ortonormal para simplificar a solução ótima da trajetória futura do sinal de controle.

Através dessa abordagem usando as Funções de Laguerre, uma predição satisfatória da trajetória futura do sinal de controle pode ser obtida sem a necessidade de um grande horizonte de predição ( $N_p$ ) e de um grande horizonte de controle ( $N_c$ ). Isto leva a um sinal de controle mais suave e à diminuição da carga computacional, contrastando com o controle MPC clássico em (Chai et al., 2011b; Chai et al., 2011a; Stumper et al., 2012), onde a solução ótima da trajetória futura de controle é obtida mediante de operadores de avanço discreto (*forward shift operator*), que requer um grande número de termos adicionais devido ao aumento nos valores de  $N_c$  e  $N_p$  para os casos em que é desejado um elevado desempenho de malha fechada com uma elevada taxa de amostragem, podendo levar a uma solução ótima inadequada e à grande carga computacional (Wang, 2004).

Este artigo tem como propósito demonstrar os benefícios das funções ortonormais de Laguerre em controladores preditivos, apresentando o projeto de um controlador preditivo multivariável discreto no espaço de estados usando as Funções de Laguerre, denominado neste trabalho de LDMPC (Laguerre Discrete-Time Model Predictive Control). Além disso, realizam-se aplicações simuladas do controlador proposto em uma coluna de destilação binária de Wood e Berry (Wood and Berry, 1973), chamada neste trabalho como WB, que é um sistema *benchmark* com duas entradas e duas saídas, contendo atrasos de transporte e saídas acopladas.

O trabalho está dividido da seguinte forma: inicialmente, a seção 2 apresenta o projeto do controlador preditivo multivariável usando Funções de Laguerre; na seção 3 trata-se a coluna de destilação de Wood e Berry; os resultados são expostos na seção 4 e as conclusões são apresentadas na seção 5.

## 2 Projeto do LDMPC

A essência do MPC é sem dúvida a otimização da trajetória futura do sinal de controle para um horizonte de predição. Neste trabalho, o modelo de projeto está na forma de espaço de estados, isso por causa da facilidade de lidar com ele ao trabalhar com projetos multivariáveis e de generalizá-lo para sistemas com " $n$ " entradas e " $q$ " saídas.

### 2.1 Modelo Aumentado no Espaço de Estados

Considerando o modelo no espaço de estados discreto descrito por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (1)$$

onde,  $x(k)$  é o vetor de estados,  $u(k)$  é a variável de entrada (sinal de controle),  $y(k)$  é a saída

do processo e  $k$  é a variável para cada instante de amostragem. As matrizes  $(A, B, C)$  são respectivamente, a matriz de estados, de entrada e de saída.

Para eliminar o erro de regime estacionário na saída e nos estados, é necessário incluir  $\Delta = 1 - z^{-1}$ ,  $z^{-i}[f(k)] := f(k-i)$ , em ambos os lados da Equação (1). Assim, obtendo-se o modelo aumentado por  $\Delta$  dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{1 \times n_1}^T \\ CA & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times n_1} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

onde se tem o novo vetor de estados aumentados  $x_a(k)$  com dimensão de  $m_1 \times 1$ ,  $m_1 = (n_1 + q)$ , sendo  $n_1$  a dimensão do vetor  $x(k)$  e  $q$  o número de saídas. Já  $I_{q \times q}$  é uma matriz identidade,  $\mathbf{0}_{q \times n_1}$  é uma matriz de zeros e  $g_{q \times 1}$  é um vetor coluna composto de zeros, enquanto as matrizes aumentadas  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $C_a$  têm as dimensões,  $m_1 \times m_1$ ,  $m_1 \times n$  e  $q \times m_1$ , respectivamente, onde  $n$  é o número de entradas.

É importante ressaltar que nessa abordagem de controle, o sinal de referência,  $y_r(k)$ , deve ser incluído em  $x_a(k)$ , isso por causa da predição dos estados estar baseada nas atuais informações das variáveis de estado. Então, o vetor de estados aumentados pode ser redefinido por,

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} \Delta x(k)^T & e(k) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

onde,  $e(k) = y(k) - y_r(k)$ .

### 2.2 Funções de Laguerre

Além da utilidade já justificada para o uso neste trabalho, as Funções de Laguerre também têm sido utilizadas para identificação de sistemas, isso por causa da sua eficiência em melhorar a precisão numérica das soluções de problemas de estimação com regressão linear (Wahlberg, 1991). Como é demonstrado em Wahlberg (1991), a rede de filtros de Laguerre (*Laguerre network*) no tempo discreto pode ser descrita por,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z) &= \frac{\sqrt{(1-a^2)}}{1-az^{-1}} \\ \Gamma_2(z) &= \frac{\sqrt{(1-a^2)}}{(1-az^{-1})(1-az^{-1})} z^{-1-a} \\ &\vdots \\ \Gamma_N(z) &= \sqrt{(1-a^2)} \frac{(z^{-1}-a)^{N-1}}{(1-az^{-1})^N} \end{aligned} \quad (4)$$

A variável  $N = \{N \in \mathbb{N} \mid N \geq 1\}$  é a ordem da cadeia de filtros de Laguerre. Em outras palavras, é o número de termos usados para representar a dinâmica futura do incremento do sinal de controle e tem uma função similar ao  $N_c$  do MPC em sua abordagem clássica.

A variável  $a$  é o polo discreto das Funções de Laguerre, tendo seu valor  $0 \leq a < 1$  para garantir a estabilidade da cadeia de filtros de Laguerre. Na literatura também é chamado fator escalar (*scaling factor*). Em geral, o parâmetro  $a$  é selecionado como uma estimativa da parte real dos polos dominantes de malha fechada. A taxa de decaimento do sinal de controle incremental depende diretamente da escolha desse fator e de  $N$ .

As Funções de Laguerre são obtidas através da transformada  $z$  inversa da rede de filtros de Laguerre,

$$l_N(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ \Gamma_N(z) \} \quad (5)$$

as quais podem ser expressas por um vetor na forma,

$$L(k) = [ l_1(k) \quad l_2(k) \quad \dots \quad l_N(k) ]^T \quad (6)$$

onde sua condição inicial é dada pelo vetor:

$$L(0)^T = \sqrt{1-a^2} [ 1 \quad -a \quad a^2 \quad \dots \quad (-1)^{N-1} a^{N-1} ] \quad (7)$$

No caso MIMO cada entrada tem sua respectiva rede de Filtros de Laguerre, cada uma com sua ordem  $N$  e seus polos  $a$ . Isso permite maior grau de liberdade de sintonia, apesar de aumentar o número de parâmetros a sintonizar, possibilita-se obter um desempenho desejado para cada entrada e saída do sistema.

De acordo com a Equação (6),  $L(k)$  pode ser resolvido recursivamente por,

$$L(k) = A_l L(k-1) \quad (8)$$

onde  $A_l$  é uma matriz de Toeplitz, com dimensões  $(N \times N)$  composta pelos parâmetros  $a$  e  $\beta = 1-a^2$ ,

$$A_l = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a\beta & \beta & a & 0 & \dots & 0 \\ a^2\beta & -a\beta & \beta & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^{N-2} a^{N-2}\beta & (-1)^{N-3} a^{N-3}\beta & \dots & \dots & \beta & a \end{bmatrix} \quad (9)$$

No projeto do LDMPC é utilizado um conjunto de Funções de Laguerre,  $l_1(m), l_2(m), \dots, l_N(m)$ , para representar uma trajetória futura,  $\Delta u(k_i), \Delta u(k_i+1), \dots, \Delta u(k_i+m)$  para cada instante de tempo  $k$ . Isso difere do MPC clássico que usa operadores de avanço discreto para obter a trajetória futura do sinal de controle para um  $N_c$ . Na abordagem usando as funções ortonormais de Laguerre o incremento do

sinal de controle é expressor por,

$$\Delta u(k_i + m | k_i) = \sum_{j=1}^N p_j(k_i) l_j(m) = L(m)^T \eta \quad (10)$$

onde  $\eta$  é um vetor de coeficientes dado por,

$$\eta = [ p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_N ]^T \quad (11)$$

Então, a trajetória futura do sinal de controle incremental pode ser representada por,

$$\Delta U = \begin{bmatrix} L(k_i)^T \eta \\ L(k_i+1)^T \eta \\ L(k_i+2)^T \eta \\ \vdots \\ L(k_i+m)^T \eta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Estes coeficientes  $p_j, j = 1, 2, \dots, N$  são os valores iniciais para o instante inicial  $k_i$  do horizonte de predição de controle, os quais definem a trajetória futura do sinal de controle incremental. No projeto do controlador LDMPC o parâmetro  $N_c$  é desconsiderado e substituído por  $N$  que é a ordem das Funções de Laguerre, que agora define o tamanho do horizonte que descreve a trajetória futura do sinal de controle. Na Equação (10) é utilizada a propriedade ortonormal das Funções de Laguerre. Assim com um adequado  $N_p$  é possível garantir o decaimento de  $\Delta u(k_i + m | k_i)$  para zero, como mostra a propriedade ortogonal a seguir:

$$\sum_{m=0}^{N_p} l_i(m) l_j(m) = 0 \quad i \neq j \quad (13)$$

Para o caso MIMO o vetor  $\eta$  é representado por,

$$\eta^T = [ \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \dots \quad \eta_i^T ] \quad (14)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de entradas. Então, há um vetor  $\eta$  para cada entrada do processo.

### 2.3 Minimização da Função Custo

A otimização e os cálculos dos coeficientes do vetor  $\eta$  são obtidos a partir da minimização da função custo,

$$J = \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \Psi x_a(k_i) + \sum_{m=1}^{N_p} x_a(k_i)^T (A_a^T)^m Q A_a^m x_a(k_i) \quad (15)$$

onde  $\Omega$  e  $\Psi$  são calculados, respectivamente,

$$\Omega = \left( \sum_{m=1}^{N_p} S_c(m)^T Q S_c(m) + R_L \right) \quad (16)$$

$$\Psi = \left( \sum_{m=1}^{N_p} S_c(m)^T Q A_a^m \right) \quad (17)$$

A soma da convolução de  $S_c(m)^T$  pode ser calculada recursivamente por meio de

$$S_c(m) = A_a m^{-1} S(m-1) + \begin{bmatrix} B_1 L_1(m-1)^T \\ B_2 L_2(m-1)^T \quad \cdots \quad B_i L_i(m-1)^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

sendo  $m = 2, 3, 4, \dots, N_p$  e as condições iniciais dadas por

$$S_c(1) = B_a \begin{bmatrix} L_1(0)^T & L(0)^T & \cdots & L_i(0)^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

$R_L$  e  $Q$  são as matrizes de ponderação do sistema e têm a função similar às matrizes  $R$  e  $Q$  de um controlador  $DLQR$  (Discrete-Time Linear Quadratic Regulators). A matriz  $Q = C_a^T C_a$  é usada nesta configuração para minimizar os erros na saída do sistema. Essa escolha produz um excelente desempenho de malha fechada para um sistema em espaço de estados aumentado por  $\Delta$  (Wang, 2009).

A matriz  $R_L$  é definida por:

$$R_L = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{N_1 \times N_1} & \nu_{N_1 \times N_2} & \cdots & \nu_{N_1 \times N_i} \\ \nu_{N_2 \times N_1} & \lambda_2 I_{N_2 \times N_2} & \cdots & \nu_{N_2 \times N_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{N_i \times N_1} & \nu_{N_i \times N_2} & \cdots & \lambda_i I_{N_i \times N_i} \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde  $I_{N \times N}$  é uma matriz identidade e  $i = 1, 2, \dots, n$  entradas,  $\nu_{N \times N}$  é uma matriz de zeros.  $\lambda \geq 0$  é usada para sintonizar a velocidade de resposta de malha fechada de cada saída do sistema. Sendo maior a velocidade de resposta quanto menor o peso de lambda. Em um sistema MIMO pode ser escolhido um  $\lambda$  para cada entrada do sistema, sintonizando-se separadamente cada saída de acordo com o desempenho desejado.

Então, aplicando-se a derivada parcial na Equação (15), a solução ótima para  $\eta$  é dada por,

$$\eta = -\Omega^{-1} \Psi x_a(k) \quad (21)$$

#### 2.4 Lei de Controle de Horizonte Retrocedente

Para o caso MIMO, a lei de controle de horizonte retrocedente *sem restrições* é obtida por,

$$\Delta u(k) = -K_{mpc} x_a(k) \quad (22)$$

sendo o ganho de malha fechada dado por,

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix} \overbrace{L_1(0)^T \quad \sigma_2^T \quad \cdots \quad \sigma_i^T}^{L_{mat}} \\ \sigma_1^T \quad L_2(0)^T \quad \cdots \quad \sigma_i^T \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \sigma_1^T \quad \sigma_2^T \quad \cdots \quad L_i(0)^T \end{bmatrix} \Omega^{-1} \Psi \quad (23)$$

onde  $\sigma_i$  é um vetor coluna nula com comprimento  $N_i$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, n$  entradas. Podendo  $K_{mpc}$  ser dividido em duas partes:

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix} K_x & K_e \end{bmatrix} \quad (24)$$

$K_x$  são os ganhos relacionados ao vetor de estados ( $\Delta x(k)$ ), já  $K_e$  são os ganhos relacionados ao erro ( $e(k) = y(k) - y_r(k)$ ) de cada saída do sistema.

De posse do ganho  $K_{mpc}$  é possível obter o sistema de malha fechada dado por,

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= (A_a - B_a K_{mpc}) \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + B_a K_e y_r(k), \\ y(k) &= C_a \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Para um melhor entendimento de todo o projeto apresentado, na Figura 1 é dado o diagrama de blocos no Simulink do controlador LDMPC.

### 3 Coluna de Destilação de WB

A coluna de destilação binária de Wood and Berry (1973) se tornou extremamente popular como um processo *benchmark* para testar o desempenho de controladores digitais. Isto foi motivado pelo fato de ter um tratamento simplificado e direto do problema de separação de metanol e água, onde diversas malhas de controle internas, referentes ao controle de fluxos internos, temperatura e nível do reservatório, estão perfeitamente interligadas, resultando em um sistema MIMO  $2 \times 2$ , com acoplamentos e atrasos assíncronos.

O modelo linear contínuo de WB pode ser representado por,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{12,8e^{-s}}{16,7s+1} & \frac{-18,9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6,6e^{-7s}}{10,9s+1} & \frac{19,4e^{-3s}}{14,4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{3,8e^{-8s}}{14,9s+1} \\ \frac{4,9e^{-3,4s}}{13,2s+1} \end{bmatrix} d(s) \end{aligned} \quad (26)$$

É importante destacar que o modelo contínuo de WB é definido com a unidade de tempo em minutos. Então, o modelo discreto foi obtido via *ZOH* (Zero-Order Hold) para um período de amostragem  $T_s = 1min$ , é definido por,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} G_{d11}(z) \\ G_{d21}(z) \end{bmatrix} d(k) \end{aligned} \quad (27)$$

$$G_{11}(z) = \frac{0,744z^{-1}}{z-0,9419}; \quad G_{12}(z) = \frac{-0,8789z^{-3}}{z-0,9535};$$

$$G_{21}(z) = \frac{0,5786z^{-9}}{z-0,9123}; \quad G_{22}(z) = \frac{0,5786z^{-9}}{z-0,9123};$$

$$G_{d11}(z) = \frac{-1,302z^{-3}}{z-0,9329};$$

$$G_{d21} = \frac{(0,2177z+0,1398)z^{-4}}{z-0,927}; \quad (28)$$

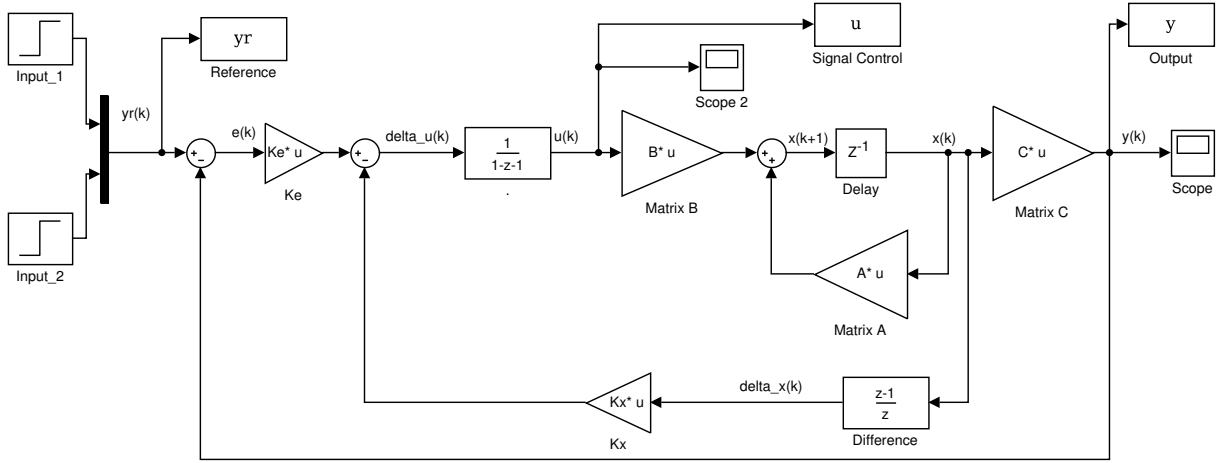


Figura 1: Diagrama de blocos do LDMPC.

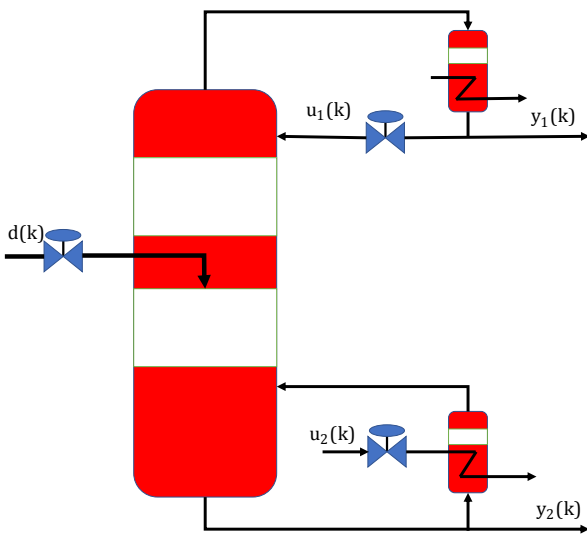


Figura 2: Coluna de destilação binária de WB.

O processo de funcionamento de WB é bem simples e intuitivo. Consiste em quando há refluxo,  $u_1(k)$ , de mistura concentrada de metanol voltando à coluna a partir do topo, ocorre um aumento da concentração de metanol tanto no topo como na base. Ao injetar vapor,  $u_2(k)$ , a partir da base da coluna, a qual se aquece e aumenta a taxa de evaporação da mistura, reduzindo assim a concentração de metanol na base. A partir do aumento da taxa de alimentação,  $d(k)$  (MeOH /  $H_2O$ ), a coluna é novamente perturbada pela adição de mais água e metanol. Assim a saída do topo,  $y_1(k)$ , libera o produto (MeOH) com o percentual mássico de metanol desejado e enquanto na saída da base,  $y_2(k)$ , libera o produto com percentual mássico de metanol descartado. As variáveis na Equação (26) e suas condições típicas de operação em que o modelo linearizado da coluna foi obtido, são definidas na Tabela 1, e na Figura 2 é apresentado a estrutura da coluna com suas respectivas entradas e saídas.

Tabela 1: Definição das variáveis para WB.

Variável	Descrição	Valores nominais
$y_1(k)$	saída do topo.	96,25 mol %
$y_2(k)$	saída da base.	0,50 mol %
$u_1(k)$	Refluxo no topo.	0,89 kg/min
$u_2(k)$	Vapor na base.	0,78 kg/min
$d(k)$	Alimentação.	1,11 kg/min

#### 4 Resultados de simulação

A seguir serão apresentados os resultados das simulações para os testes de rastreamento de referência e perturbação de carga usando WB, objetivando mostrar o desempenho do método apresentado neste trabalho. Os parâmetros de sintonia utilizados em todas as simulações foram:  $N_p = 100$ ;  $N_1 = N_2 = 2$ ;  $a_1 = a_2 = 0,5$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 100$  e  $Q = C_a^T C_a$ . Esses parâmetros de sintonia foram selecionados por tentativa e erro, para assim poder fazer uma demonstração justa em relação a controladores tradicionais com estrutura PID.

A lei de controle em (22) pode ser reescrita como:

$$\Delta u(k) = - \underbrace{\begin{bmatrix} K_x & K_e \end{bmatrix}}_{K_{mpc}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_a(k) \\ \Delta x(k) \\ \begin{pmatrix} y_1(k) - y_{r1}(k) \\ y_2(k) - y_{r2}(k) \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_a(k)} \quad (29)$$

Então, com base nos parâmetros de sintonia escolhidos, foi calculado o ganho de malha fechada  $K_{mpc}$  em (23), onde:

$$L_{mat} = \begin{bmatrix} \underbrace{L_1(0)^T}_{\begin{bmatrix} 0.866 & -0.433 \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underbrace{L_2(0)^T}_{\begin{bmatrix} 0.866 & -0.433 \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 47560 & 46450 & -82600 & -0.8062 \\ 46450 & 45710 & -81000 & -79290 \\ -82600 & -81000 & 161230 & 157610 \\ -80620 & -79290 & 161230 & 154700 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 20044 & 5754 & -28703 \\ 19592 & 5631 & -28102 \\ -28310 & -16348 & 40602 \\ -27592 & -15952 & 39638 \\ -16745 & 1837 & 1013 \\ -16423 & 1770 & 978 \\ 47666 & -2576 & -2860 \\ 46617 & -2478 & -2759 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Chegando ao ganho de realimentação utilizado nas simulações apresentadas, dado por:

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix} \overbrace{0.3024 & -0.0487 & -0.3146 & 0.1379}^{K_x} \\ \overbrace{0.1935 & -0.3521 & -0.3651 & 0.8171}^{K_e} \\ \overbrace{0.0946 & -0.0035}^{K_e} \\ \overbrace{-0.0221 & -0.1233}^{K_e} \end{bmatrix} \quad (33)$$

As Figuras 3 e 4, apresentam os resultados das simulações dos testes de rastreamento de referência. Em seguida, são apresentadas nas Figuras 6 e 7, as simulações com perturbação de carga. Na Tabela 2 são mostrados os índices de desempenho para os testes de rastreamento e perturbação de carga.

Os índices de desempenho utilizados como métricas comparativas foram: integral do sinal de controle quadrático (ISU, *Integral of Squared Control*), integral do erro absoluto (IAE, *Integral Absolute Error*), integral do erro quadrático (ISE, *Integral of Squared Error*) e tempo de assentamento (ST, *Settling Time*).

Analisando os resultados dos testes de rastreamento de referência, verifica-se que o LDMPC obteve um desempenho aceitável, conseguindo compensar os atrasos apresentados pela dinâmica da planta, e bem como apresentar um efeito de desacoplamento adequado entre as saídas do sistema.

Para o caso com perturbação,  $d(k)$ , gerada pela alimentação da torre, o LDMPC também obteve um desempenho adequado. Com o intuito de comparar os resultados obtidos com os dois controladores tradicionais baseados na estrutura PID, são apresentados na Tabela 3, os índices IAE de simulações com perturbação de carga de controladores digitais do tipo PI (Proportional Integral) e suas respectivas sintonias, sendo essas informações obtidas de (Wood and Berry, 1973). Analisando esses dados, verifica-se que o controlador LDMPC

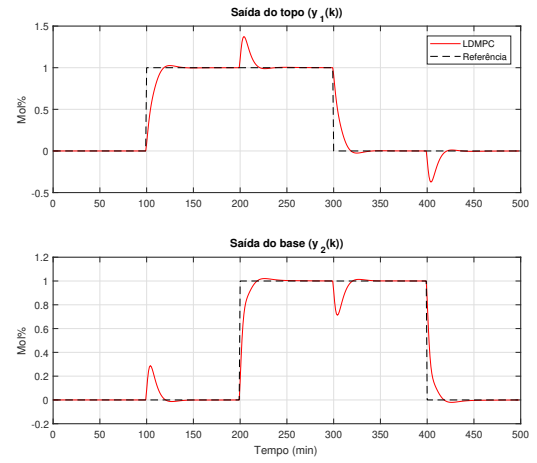


Figura 3: Teste de rastreamento: saídas.

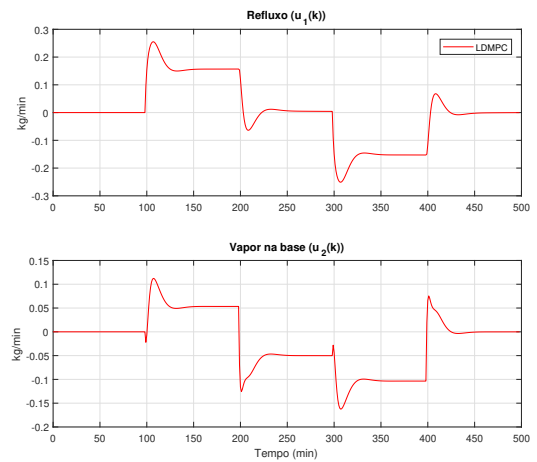


Figura 4: Teste de rastreamento: entradas.

obteve melhores índices IAE quando sujeito ao mesmo tipo de perturbação de carga, como pode ser visto na Tabela 2. Então, pode-se afirmar que o controlador LDMPC tem um desempenho superior em relação a certos controladores tradicionais utilizados na indústria.

Na Figura 5 são apresentadas as posições dos 6 polos de malha fechada da coluna de destilação binária de WB para LDMPC, calculados mediante a Equação (25), verificando-se que todos os polos estão dentro do círculo unitário.

## 5 Conclusões

Este artigo centrou-se em apresentar os potenciais benefícios das Função Laguerre dentro dos MPC aplicados em sistemas MIMO, para os casos sem restrições nas variáveis de entrada, a partir de uma abordagem no espaço de estados. É válido também observar que a técnica utilizada no projeto do controlador apresentado neste trabalho, são de simples implementação para sistemas MIMO de "n" entradas e "q" saídas. Isso pelo motivo de

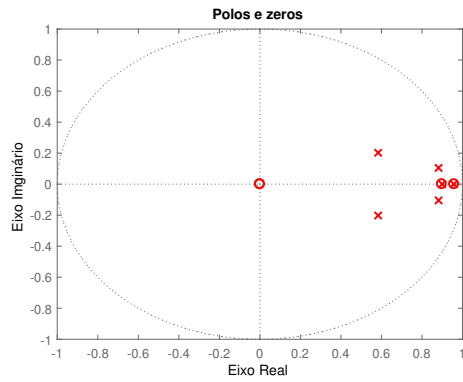


Figura 5: Polos e zeros de malha fechada.

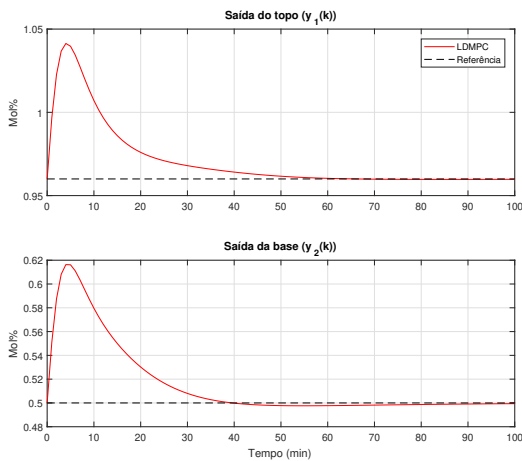


Figura 6: Rejeição a perturbação: saídas.

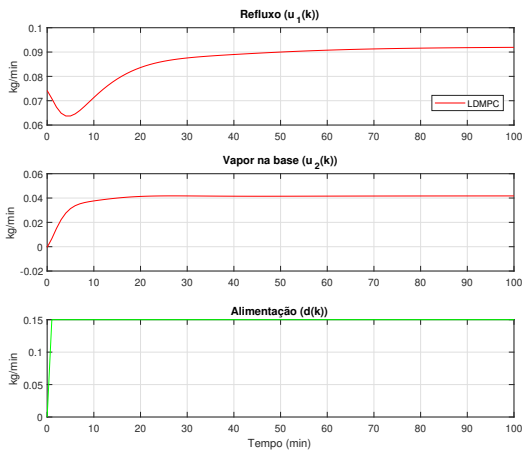


Figura 7: Rejeição a perturbação: entradas.

ser utilizada uma abordagem no espaço de estados, que torna o método generalizado, assim, sem muitas modificações no projeto.

Os algoritmos desenvolvidos foram testados na coluna de destilação binária de WB, que é uma planta *benchmark*, com atrasos assíncronos e acoplamentos, sendo um desafio interessante para o

Tabela 2: Índices de desempenho de WB

		Rastreamento	Perturbação
<b>ISU</b>	$u_1$	36,17	0,76
	$u_2$	23,39	0,16
<b>ISE</b>	$y_1$	10,42	0,05
	$y_2$	6,67	0,12
<b>IAE</b>	$y_1$	22,57	1,11
	$y_2$	16,68	1,73
<b>ST(min)</b>	$y_1$	118	8
	$y_2$	218	19

Tabela 3: PI desempenho: perturbação de carga.

( $d(k) = 0,34 \text{ lb/min (0,15 kg/min)}$ )

PI	$(y_1(k))$			$(y_2(k))$		
	$K_p$	$K_i$	IAE	$K_p$	$K_i$	IAE
<b>P1-3</b>	-0,2	-0,045	11,9	0,04	0,015	29,3
<b>R-1</b>	-0,09	-0,015	5,1	0,1	0,025	18,5
<b>C-1</b>	-0,35	-0,01	4,1	0,12	0,035	16,7

controlador apresentado neste trabalho. Então, como foi demonstrado nos resultados, o controlador mostrou-se superior aos controladores tradicionais que utilizam a estrutura PID.

Para trabalhos futuros, a extensão do controle multivariável usando as Funções de Laguerre para processos estocásticos. O método apresentado neste trabalho utiliza o modelo determinístico ARX (AutoRegressive with eXogenous inputs) e com as devidas modificações e adições no projeto, pode ser utilizado o modelo ARMAX (AutoRegressive Moving Average with EXogenous inputs), então podendo controlar processos, sujeitos a ruídos e incertezas estocásticas.

## 6 Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Pará (UFPA), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (408559/2016-0), ao Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar e a Fundação Amazônica de Amparo a Estudos e Pesquisa (FA-PESPA)(*ICAAF 049/2016*).

## Referências

- Anderson, B. D. and Moore, J. B. (1971). *Linear optimal control*, Vol. 197, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Causa, J., Karer, G., Núñez, A., Sáez, D., Škrjanc, I. and Zupancič, B. (2008). Hybrid fuzzy predictive control based on genetic algorithms for the temperature control of a

- batch reactor, *Computers & chemical engineering* **32**(12): 3254–3263.
- Chai, S., Wang, L. and Rogers, E. (2011a). Cascade model predictive control of a PMSM with periodic disturbance rejection, *Australian Control Conference (AUCC), 2011*, IEEE, pp. 309–314.
- Chai, S., Wang, L. and Rogers, E. (2011b). Model predictive control of a permanent magnet synchronous motor, *IECon 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, IEEE, pp. 1928–1933.
- Dovžan, D. and Škrjanc, I. (2010). Predictive functional control based on an adaptive fuzzy model of a hybrid semi-batch reactor, *Control Engineering Practice* **18**(8): 979–989.
- Kalman, R. E. et al. (1960a). Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **5**(2): 102–119.
- Kalman, R. E. et al. (1960b). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of basic Engineering* **82**(1): 35–45.
- Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. and Scokaert, P. O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica* **36**(6): 789–814.
- Potočnik, B., Mušič, G., Škrjanc, I. and Zupančič, B. (2008). Model-based predictive control of hybrid systems: a probabilistic neural-network approach to real-time control, *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **51**(1): 45–63.
- Richalet, J. and O'Donovan, D. (2009). *Predictive functional control: principles and industrial applications*, Springer Science & Business Media.
- Rosich, A. and Ocampo-Martinez, C. (2015). Real-time experimental implementation of predictive control schemes in a small-scale pasteurization plant, *Developments in Model-Based Optimization and Control*, Springer, pp. 255–273.
- Stumper, J.-F., Dötlinger, A. and Kennel, R. (2012). Classical model predictive control of a permanent magnet synchronous motor, *EPE Journal* **22**(3): 24–31.
- Wahlberg, B. (1991). System identification using Laguerre models, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(5): 551–562.
- Wang, L. (2004). Discrete model predictive controller design using Laguerre functions, *Journal of process control* **14**(2): 131–142.
- Wang, L. (2009). *Model predictive control system design and implementation using MATLAB®*, Springer Science & Business Media.
- Wood, R. and Berry, M. (1973). Terminal composition control of a binary distillation column, *Chemical Engineering Science* **28**(9): 1707–1717.